Quaderni GRIMeD n.7

LA SCUOLA CHE ACCOGLIE, FORMA E NON DISPERDE

IL RUOLO DEL PENSIERO MATEMATICO PER LO SVILUPPO DELLA PERSONA

Il Quaderno raccoglie gli interventi degli anni 2021 e 2022

a cura di

Chiara Cateni e Francesca Ricci

ISBN 9788894577419

Composizione tipografica dei testi a cura di Chiara Cateni.

http:/ / www.grimed.net
e-mail: segreteria@grimed.net

Sezione Relazioni

Sezione Laboratori

COSTRUIRE ED ESPLORARE OGGETTI ASTRATTI: UN VIAGGIO NELLA CONOSCENZA MATEMATICA INTUITIVA

Samuele ANTONINI[1]

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini", Università di Firenze

Riassunto

Nell'apprendimento e insegnamento, è estremamente importante promuovere la costruzione di una buona dialettica tra la conoscenza formale, la conoscenza procedurale e la conoscenza intuitiva della matematica. In queste pagine, in particolare, ci soffermiamo sulla conoscenza intuitiva, sull'importanza di ampliare i propri "spazi di esempi" e di acquisire familiarità con gli oggetti matematici attraverso le azioni su di essi: come gli oggetti materiali, anche gli oggetti astratti si possono costruire, rompere, modificare, per comprenderne la struttura, le proprietà e le reciproche relazioni.

Introduzione

Obiettivo di questo articolo è quello di sostenere l'importanza, nell'apprendimento della matematica, di giocare con gli oggetti matematici (anche astratti), di esplorarli, costruirli, smontarli. Per usare un altro termine, l'importanza di "aggeggiare" con gli oggetti matematici.

Partiamo da due osservazioni.

La prima è che negli ultimi decenni è cresciuto lo spazio che la ricerca in didattica della matematica ha riservato al coinvolgimento del corpo nell'apprendimento e insegnamento della matematica. Diverse attività didattiche vengono progettate sulla base di prospettive teoriche che pongono in primo piano esperienze motorie dei soggetti che apprendono, come base per la costruzione di concetti di base ma anche relativi a oggetti matematici particolarmente astratti (si veda, per esempio, Arzarello, 2008).

La seconda osservazione è che se potessimo osservare da vicino un matematico al lavoro, coinvolto nella risoluzione di un problema complesso in cui esplora relazioni tra oggetti matematici astratti, in cui costruisce congetture, dimostrazioni, genera esempi e controesempi, potremmo vedere come il linguaggio formale si mescola con tutta una serie di "segni", ovvero parole, segni grafici, gesti, ecc., non lontani da quelli che si utilizzano per descrivere la gestione di oggetti concreti. Spesso l'atteggiamento nei confronti di oggetti astratti è paragonabile a quello di un artigiano nei confronti degli oggetti che va a costruire, smontare, plasmare e perfezionare. Anche se il matematico non ha accesso diretto all'oggetto astratto, lavora anche lui (o lei) su particolari materie prime, che sono le rappresentazioni dei suoi oggetti: formule, grafici, tabelle, parole, disegni…

Per meglio chiarire in che modo queste osservazioni si legano all'insegnamento e apprendimento della matematica, è opportuno andare a precisare alcuni termini che riguardano la conoscenza matematica.

Conoscenza procedurale e conoscenza concettuale

Le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo, nella parte relativa alla matematica, aprono chiarendo l'importanza di questa disciplina e di una educazione ad essa dedicata:

> Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità […] In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a

> sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. (MIUR, 2012, p. 60)

Il punto centrale di queste righe è la funzione della "conoscenza matematica" e pertanto risulta fondamentale chiarirne il significato. La questione è sia epistemologica e riguarda la natura stessa della conoscenza matematica, sia cognitiva e didattica, perché a seconda della nostra visione, potremo dare sensi diversi alla matematica e al suo apprendimento/insegnamento, definire obiettivi e traguardi di insegnamento, fare scelte metodologiche e valutare l'efficacia stessa delle attività didattiche. Sarà diverso se con conoscenza matematica intenderemo la conoscenza di procedure (da quelle per l'esecuzione di operazioni elementari a quelle complesse del calcolo differenziale e oltre), o, giusto per fare un esempio, la conoscenza di teoremi e definizioni, senza contare che bisognerebbe anche precisare cosa intendiamo con "conoscenza di teoremi e definizioni".

Una prima importante distinzione è tra conoscenza concettuale, che riguarda concetti e loro relazioni, e conoscenza procedurale, ovvero la conoscenza di procedure e algoritmi (si veda Hiebert, 1985). Prendiamo per esempio le equazioni. La conoscenza concettuale riguarda il significato di uguaglianza, di soluzione, di equazioni equivalenti, eccetera. La conoscenza procedurale è la conoscenza di una procedura che a partire da un'equazione mi permette di determinare l'insieme delle soluzioni.

Ovviamente ogni procedura si basa sulle relazioni, stabilite in una teoria matematica, e dunque conoscenza concettuale sono in stretta relazione. Tuttavia, una persona potrebbe aver compreso cosa si intende per soluzione di un'equazione senza per questo conoscere una procedura che permetta di determinare le soluzioni (cosa che può capitare a molti, per esempio, con un'equazione di terzo grado). Ma è vero anche il viceversa. La figura 1 riporta le risposte di uno studente di classe terza di una scuola secondaria di primo grado ad un questionario sulle equazioni. Lo studente risolve correttamente l'equazione 2+x=-3, e con la freccetta mostra tra l'altro di conoscere i passi della procedura utilizzata. Tuttavia, lo studente sostiene che l'equazione x=5 NON abbia soluzione e, coerentemente con questa risposta, propone x=19 come esempio di un'equazione senza soluzione.

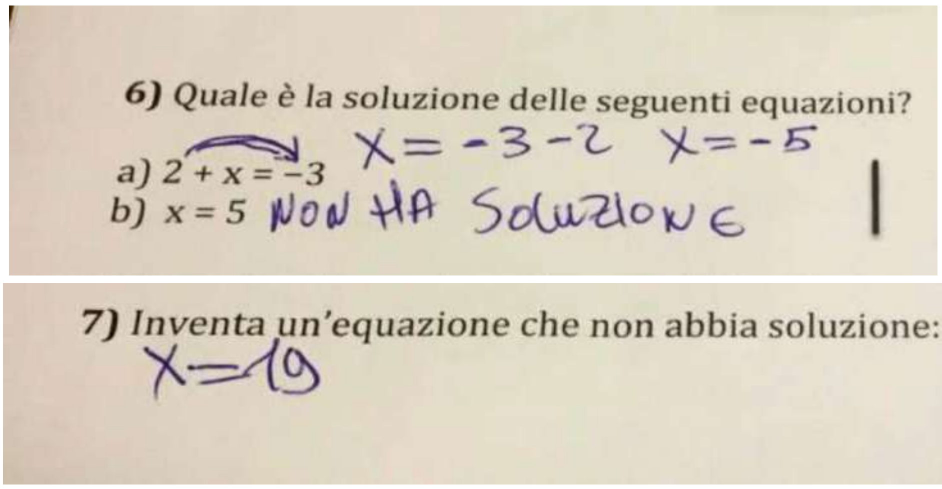


Figura 1 – Risposte di uno studente di scuola secondaria di I grado ad un questionario sulle equazioni.

Questo studente, dunque, conosce la procedura per determinare la soluzione di un'equazione senza avere la conoscenza di cosa sia la soluzione di un'equazione. La stessa visione, evidentemente procedurale, della matematica, ci permette anche di interpretare i motivi per cui, secondo questo studente (o studentessa) le equazioni x=5 e x=19 non hanno soluzioni. Se l'equazione è vista come un esercizio da risolvere applicando una procedura, su x=5 e x=19, non essendoci numeri o lettere da portare da una parte o dall'altra del segno di uguale, non c'è nulla da fare. La soluzione, più che essere un numero con particolari proprietà, è probabilmente vista come il risultato di una procedura da eseguire e in questi casi non c'è alcuna procedura da applicare; lo studente potrebbe dare significato al non avere soluzione in termini di "non si può risolvere", inteso come "non posso farci nulla".

Analoghe considerazioni possono essere fatte con la maggior parte dei concetti matematici e riguardano studenti e studentesse di tutti i livelli scolari, compreso quello universitario e oltre. Per esempio, in occasione di uno studio che ha coinvolto studenti e docenti di matematica relativamente alla divisione tra numeri razionali, D'Amore e Fandiño Pinilla osservano:

> Va anche detto che nessuno degli studenti da noi intervistati e quasi nessuno dei molti docenti di Matematica da noi intervistati ha saputo dare una spiegazione logica sensata o formale del fatto che, per eseguire la divisione fra due frazioni a/b:c/d (b≠0 e d≠0), si può effettuare la moltiplicazione a/b·d/c (c≠0). Per tutti è una "regola", "si fa così", "basta fare così", ma nessuno sa spiegare un perché. Il che si traduce, dal punto di vista didattico, in una trattazione inaccettabile che prevede che in Matematica ci sono questioni che non si spiegano, che si devono eseguire in un certo modo, ma nessuno sa il perché. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2021, p. 71)

Sono, questi, effetti dello sbilanciamento sulla conoscenza procedurale di una certa pratica didattica, che pone attenzione all'applicazione di "regole" impedendo in questo modo (si veda, per esempio, Zan 2007) alla matematica di contribuire "a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri" (MIUR, 2012, p. 60). Lo sbilanciamento sulla conoscenza procedurale è agli antipodi della posizione chiaramente espressa nelle Indicazioni Nazionali:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola […] Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare (MIUR 2012, p. 60).

Definizione e immagine di un concetto matematico

Concentriamoci ora sulla conoscenza concettuale. Un'analisi in prospettiva didattica deve tener conto sia della natura teorica dei concetti matematici sia degli aspetti cognitivi. I concetti matematici sono definiti in una specifica teoria matematica attraverso un opportuno linguaggio. Così, per fare alcuni esempi, si definisce un numero pari, la divisibilità, una funzione, una funzione continua, l'insieme delle soluzioni di un'equazione, le altezze di un triangolo, i poligoni, e così via.

Dal punto di vista cognitivo, un passo importante è stato fatto con la distinzione di Tall e Vinner (si veda Vinner 1991) fra la definizione di un oggetto matematico (*concept definition*) e la struttura cognitiva che una persona associa al concetto (*concept image*) e che può comprendere la definizione, ma anche varie rappresentazioni, grafici, esempi, immagini, emozioni e sensazioni legate all'esperienza. L'immagine del concetto dipende dal soggetto e può cambiare nel tempo. Così l'immagine di funzione continua di due studenti di liceo può essere molto diversa, e può subire variazioni nel tempo acquisendo nuove conoscenze. Analogamente l'immagine di numero pari potrebbe comprendere una fila di coppie di oggetti, l'immagine del numero 0 potrebbe essere legata al vuoto e all'assenza.

Un apprendimento significativo dovrebbe avere anche l'obiettivo di costruire un'efficace dialettica tra definizione e immagine del concetto.

L'esperienza e le manipolazioni degli oggetti matematici contribuiscono a modificare questa dialettica, e nel migliore dei casi, a sviluppare e ampliare l'immagine del concetto. Tuttavia può succedere che uno studente non costruisca l'immagine di un certo concetto e questo può avere la conseguenza che lo studente non riesca ad utilizzare il concetto in situazioni diverse da quelle di esercizi ripetitivi in cui applica regole memorizzate. Può anche succedere che l'immagine costruita non risulti coerente con la definizione o anche che diverse parti dell'immagine non siano tra loro coerenti. Queste incoerenze possono in generale essere fonte di difficoltà, errori e misconcezioni e possono spiegare risposte che potrebbero sembrare senza senso.

Vinner (1991) riporta per esempio le risposte di studenti di 16-17 anni in problemi che riguardano le funzioni. Anche se riportano la definizione corretta di funzione, diversi studenti richiedono poi che le funzioni debbano avere particolari proprietà aggiuntive, per esempio che siano rappresentate con precise relazioni algebriche o che i grafici siano sufficientemente regolari. La spiegazione per questi comportamenti è che l'immagine di funzione si è sviluppata in modo non coerente con la definizione matematica, in seguito all'esperienza degli studenti, principalmente concentrata su particolari esempi di funzioni (si veda anche Antonini et al., 2008).

Un altro esempio interessante, alla secondaria di secondo grado, è il concetto di limite. L'immagine del concetto comprende grafici, esempi di limiti di funzioni e di successioni, limiti notevoli, procedure di calcolo e metafore. La stessa parola "limite" può contribuire a formare un'immagine distorta del concetto matematico, in quanto nel linguaggio quotidiano è usata spesso con un'accezione diversa, per esempio per riferirsi a ciò che non può essere superato o non può essere raggiunto. Questa immagine di limite è molto diffusa tra gli studenti che a volte faticano a considerare funzioni che assumono il valore del limite anche infinite volte.

In geometria, è comune disegnare i triangoli in modo che l'altezza sia relativa ad una base posta in una posizione particolare (di solito parallela al bordo inferiore del foglio). Questa particolare posizione può portare a costruire un'immagine che poi influisce sui processi cognitivi. In figura 2 possiamo osservare i segmenti disegnati da uno studente cui era stato chiesto di tracciare le altezze di alcuni triangoli. Lo studente, di una classe terza di una scuola secondaria di primo grado, aveva riportato correttamente la definizione di altezza. Appare evidente come in questo caso, peraltro molto comune, entri in gioco prepotentemente nei processi di pensiero l'aspetto figurale (con la centralità dell'orizzontale e verticale) più che la definizione.

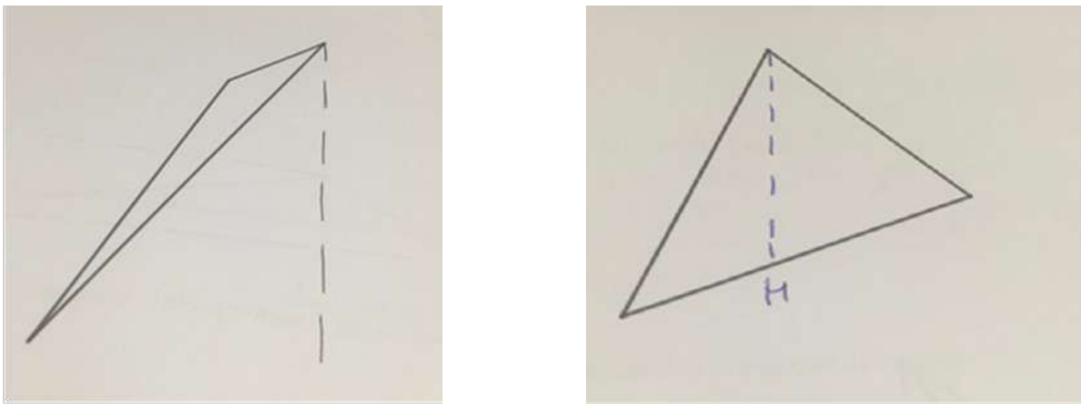


Figura 2 – Altezze di due triangoli secondo uno studente di III di una scuola secondaria di I grado.

La conoscenza intuitiva

Come già osservato, gli oggetti che il matematico costruisce e va a studiare non sono percepibili ai sensi. La conoscenza delle proprietà di questi oggetti, la cui descrizione si articola in forma di teoria matematica, si costruisce attraverso la mediazione del ragionamento. Tuttavia, nel suo atto creativo, il pensiero non può affidarsi soltanto alla conoscenza formale di ciò che indaga, ma ha necessità, come afferma Fischbein (1987), di punti di riferimento affidabili, evidenti e immediati, come nel caso del comportamento pratico, reale, concreto in cui abbiamo certezze relative ad oggetti reali e ad operazioni su di essi. Scrive Fischbein:

> *Gli "oggetti" mentali (concetti, operazioni, enunciati) devono acquisire una sorta di consistenza intrinseca ed evidenza diretta simile a quella degli oggetti e degli eventi reali, esterni e materiali, se il processo di ragionamento vuole essere un'attività genuina e produttiva*. Un'intuizione è, allora, un'idea che possiede le due proprietà fondamentali della realtà concreta e oggettivamente data; l'immediatezza – cioè l'*evidenza* intrinseca – e la *certezza* (non una certezza formale convenzionale, ma una certezza immanente, significativa dal punto di vista pratico) (Fischbein, 1987, p. 21, corsivo originale, traduzione dell'autore)

Fischbein chiama *conoscenza intuitiva* la conoscenza con le caratteristiche della conoscenza di oggetti reali e materiali (evidenza diretta, immediatezza, certezza, …) e della loro manipolabilità, che ha il ruolo di conferire ad uno sforzo intellettuale le proprietà che garantiscono la produttività e l'efficienza di un comportamento pratico.

Le implicazioni didattiche degli studi di Fischbein sono numerose. Ci limitiamo in questo contesto a qualche considerazione sulle intuizioni.

Per costruire conoscenza intuitiva, né l'esposizione di un docente in una lezione frontale (didattica trasmissiva), né l'esecuzione di esercizi ripetitivi risultano efficaci. Per costruire intuizioni chi apprende deve essere attivamente coinvolto, come d'altra parte, è in generale caldamente incoraggiato nelle Indicazioni Nazionali:

> In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. (MIUR 2012, p. 60)

"Aggeggiare" con gli oggetti matematici

Uno strumento tanto interessante quanto trascurato, per costruire conoscenza intuitiva degli oggetti matematici, per ampliare l'immagine dei concetti e legarla alle relazioni teoriche, è quello di costruire una galleria di esempi sufficientemente ricca.

Lo studio di Dahlberg e Housman (1997) mostra che gli studenti che costruiscono i propri esempi e non-esempi mentre studiano nuovi concetti sono quelli che utilizzano poi i concetti appresi nel modo più adeguato. Watson e Mason (2005) definiscono *spazio di esempi* l'insieme di esempi che un individuo ha a disposizione in un certo momento di fronte ad un dato compito e sostengono che apprendere matematica è fortemente legato alla costruzione, ampliamento ed esplorazione degli spazi di esempi, in modo che chi apprende acquisisca familiarità con concetti e relazioni. Anche in questo caso, viene ribadita l'importanza della costruzione dei propri esempi più che la presentazione di una lista da parte degli insegnanti. Sulla stessa linea, in lavori precedenti (Antonini, 2011, 2019) abbiamo descritto il ruolo importante dei processi di costruzione di esempi da parte degli studenti. Questi processi sugli oggetti matematici riguardano il costruire, manipolare e trasformare oggetti astratti ("aggeggiare" con gli oggetti matematici), e ricordiamo come in generale sia ampiamente condiviso che l'acquisizione dei concetti sia fortemente legata alle azioni sugli oggetti.

Vediamo alcuni esempi.

Multipli e divisori

Molto lavoro alla scuola secondaria di primo grado è dedicato ai concetti di minimo comune multiplo e massimo comun divisore. Molto spesso l'attenzione si concentra in particolare (a volte, esclusivamente!) sulla conoscenza procedurale degli algoritmi utilizzati per determinare questi numeri. Per costruire conoscenza intuitiva possiamo costruire e maneggiare oggetti matematici e dunque, in questo caso, si potrebbe chiedere di generare successioni di multipli (scrivendole per esempio in strisce di carta), confrontare le successioni, determinare i numeri in comune a due o più successioni di multipli, ricercare diverse regolarità. Dopo aver preso familiarità con le successioni di multipli, si possono esplorare relazioni tra queste successioni come, per esempio, le seguenti: Quali sono le successioni di multipli contenute nella successione dei multipli di un numero dato (es. 6)? E quali sono quelle che le contengono? Quali sono i numeri che compaiono in due successioni di multipli? E in tre (eccetera)? In quali successioni di multipli compare il numero 15? Perché? Come dovrebbe apparire evidente, le possibilità sono numerose.

Altezze di triangoli

L'esperienza con i triangoli è spesso limitata a triangoli disegnati in modo che la base sia parallela al lato corto del foglio e l'altezza sia verticale. Sarà invece importante promuovere un ampliamento dello spazio di esempi in modo da far costruire un'immagine del concetto di altezza che non dipende da come è posizionato il triangolo. L'ampliamento dello spazio di esempi potrà avvenire grazie alla costruzione, da parte degli studenti, di triangoli diversi e delle loro altezze, laddove sarà importante anche promuovere la consapevolezza di quali caratteristiche del triangolo e della sua posizione rende più o meno problematico tracciare le altezze. Un'esperienza interessante di questo tipo è l'attività proposta da Soldano (2019) in un ambiente di geometria dinamica. L'attività consiste in un gioco in cui un giocatore costruisce un triangolo scegliendo dove posizionare i vertici in modo da mettere in difficoltà un secondo giocatore il cui obiettivo è quello di tracciare l'altezza del triangolo relativa ad una particolare base (si veda https://www.geogebra.org/m/rnmqcvm3).

Funzioni reali di variabile reale

Per promuovere la familiarità con questi oggetti matematici possiamo richiedere agli studenti di costruire funzioni derivabili e non derivabili, continue e non continue, funzioni continue e non derivabili (oltre alla classica funzione $f(x)=|x|$) in un punto, in due punti, in tre, in infiniti punti, eccetera. Funzioni limitate, non limitate, limitate in un intervallo e senza massimi e minimi; non limitate ma senza limite all'infinito, e così via.

L'esplorazione di questi mondi di funzioni (e dei vari modi in cui si possono rappresentare) porta a costruire familiarità con le funzioni e a dare senso alle loro proprietà e ai teoremi che si vanno a studiare, costruendo uno spazio di esempi in cui ritrovare immediatamente esempi e controesempi e comprendendo più profondamente la relazione tra ipotesi e tesi (per approfondire, si veda Antonini 2019).

Per esempio, la produzione di esempi di funzioni che soddisfano tutte le ipotesi di un teorema tranne una e che non soddisfano la tesi è di fatto la costruzione di un controesempio che dimostra la necessità di una particolare ipotesi, e questo contribuisce alla costruzione di un grado più alto di conoscenza del teorema stesso.

Per concludere, in tutti gli ambiti della matematica, dai più elementari ai più avanzati, possiamo porci l'obiettivo di favorire la costruzione di conoscenza intuitiva attraverso la promozione della familiarità con gli oggetti matematici. Dovremo certamente tener conto che questa familiarità non passa dall'esecuzione di procedure e dalla triste applicazione di regole di cui non si conosce il funzionamento, quanto dal coinvolgimento attivo di chi apprende nel generare congetture e argomentazioni, nel costruire ed esplorare spazi di esempi, nel giocare con gli oggetti matematici come il bambino gioca con un giocattolo e lo rompe, magari, proprio per capire com'è fatto.

Riferimenti bibliografici

ANTONINI, S., 2011, Generating examples: focus on processes. ZDM Mathematics Education, 43(2), pp. 205-217.

ANTONINI, S., 2019, Congetturare e argomentare tra esempi e controesempi. In F. Morselli, G. Rosolini, C. Toffalori (a cura di), Educare alla razionalità. Tra logica e didattica della matematica, (pp. 417-440). Unione Matematica Italiana: Bologna.

ANTONINI, S., FURINGHETTI, F., MORSELLI, F., TOSETTO, E., 2008, Costruzione di esempi in analisi matematica da parte di studenti universitari. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 31B n. 5, ottobre 2008, pp. 419-445.

ARZARELLO, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. In M. Niss (Ed.), Proceedings of ICME10, Copenhagen, July 4–11 2004 (pp. 158–181). IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark.

DAHLBERG, R.P. & HOUSMAN, D.L., 1997, Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, vol. 33, pp. 283-299.

D'AMORE, B., & PINILLA, M. I. F. (2021). La ricerca in Didattica della Matematica: Una responsabilità dei matematici. La matematica e la sua didattica, 29(1), 39-80.

FISCHBEIN, E., 1987, Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer.

HIEBERT, J., 1985, Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

MIUR, 2012, Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale. Firenze: Le Monnier.

SOLDANO, C., 2019, Apprendere con la logica dell'indagine: attività di giocoindagine all'interno di ambienti di geometria dinamica. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 42(3), 237-259.

VINNER, S., 1991, The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 65–81, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

WATSON, A. & MASON, J., 2005, Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

ZAN, R., 2007, Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire. Milano: Springer.

PROF, QUANTO MI HAI DATO?

IL RICONOSCIMENTO DEL MERITO: UNA QUESTIONE ETICA E... INCLUSIVA

Luisa PIARULLI

Abstract

L'articolo 34 della Costituzione Italiana richiede uno sguardo attento e profondo, soprattutto in un tempo a rischio di mistificazione delle parole. È un articolo prezioso che può e deve rigenerare l'Educazione per liberarla da ogni forma di strumentalizzazione funzionale alla crescita del "capitale economico" più che al "capitale umano", inteso quest'ultimo, come ricchezza di talenti, attitudini, doni di cui ogni essere umano è portatore, senza distinzione alcuna. La scuola e la famiglia possono sostenersi vicendevolmente nell'intento di consentire a ciascuno la piena realizzazione personale, disegnando e compiendo il proprio progetto di vita. Ognuno se lo merita, ma occorrono una nuova e alta visione di umanesimo, un'etica del linguaggio educativo, l'assenza di giudizio sul valore della persona che desidera abitare la scuola come ogni altro luogo educativo. La pretesa di oggettività, tanto decantata, è una mera illusione. La scuola dei test, dei questionari e una valutazione quantitativa non rivelano la bellezza e l'unicità individuali. Siamo tutti capaci e meritevoli e nessuno merita di stare al margine, né di venire escluso, né di disperdersi Una società così interpretata è naturalmente inclusiva. Siamo esseri in relazione, intersoggettivi, pervasi da una biografia scritta a più mani che ci accompagna sempre e inevitabilmente. L'uno è responsabile dell'altro.

*La scuola è aperta a tutti.
L'istruzione inferiore, impartita per almeno otto anni, è obbligatoria e gratuita. I capaci e meritevoli, anche se privi di mezzi, hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi. La Repubblica rende effettivo questo diritto con borse di studio, assegni alle famiglie ed altre provvidenze che devono essere attribuite per concorso.*
Articolo 34 della Costituzione Italiana

Le parole di una studentessa…
Nella scuola quasi mai si valorizza il potenziale di un individuo, che giunge anche a pensare di non averlo, sentendosi inappagato e sprecato… è importante che non si facciano confronti tra gli alunni perché ognuno è diverso. Vorrei che non ci fossero le bocciature perché è una cosa che ti fa sentire inferiore rispetto agli altri. Penso che la scuola dovrebbe essere un posto felice, dove si fa cultura, dove s'impara a essere sereni. Non è giusto giudicare una persona, non è giusto che una persona venga considerata un numero. Potrebbe avere altre potenzialità … La scuola di oggi mi delude sempre di più. Esclude i più deboli e privilegia i più forti e… chi imbroglia. Perché penalizzare gli studenti per i loro punti deboli?[1]

[1] Il presente contributo fa ampio riferimento al testo: PIARULLI L., LANDINI SABA G., SPANO I., *Prof… quanto mi hai dato? Etica e pedagogia della valutazione scolastica,* Golem, Torino 2021, p. 20
Parte Prima, *Oltre il giudizio c'è la pedagogia. Siamo capaci. Siamo meritevoli. Nessuno escluso*, di Luisa Piarulli

La questione relativa alla valutazione scolastica è molto delicata. Non è un caso che gli studi della docimologia siano in continuo divenire, come si rileva dalla successione delle riforme che investono la scuola, soprattutto quella primaria. Essa è risultato della ricerca continua, delle osservazioni sul campo, dell'analisi multidisciplinare, non ultimo essa è lo specchio del tempo. La docimologia è un ramo della pedagogia e ha una sua preistoria, quella psicotecnica. Riccardo Massa invita a non assimilare ad essa la didattica e per questo afferma la necessità di una costante attenzione pedagogica: «Una scuola che s'interroga sulla valutazione è animata da una idealità democratica ed egualitaria, al di là degli usi biechi, a cui siamo sempre più esposti, di test sommativi al termine di qualunque percorso di formazione, di testi di accesso all'università e soprattutto a quelli a cui si vorrebbe affidare un controllo sull'intero sistema di istruzione».[2] Sono questioni che attengono nello specifico alla scienza dell'educazione e della formazione. Tuttavia la pedagogia vive una sorta di marginalizzazione, cosicché le riforme sulla valutazione scolastica vengono spesso applicate dai docenti senza un'autentica convinzione o com-partecipazione o vissute come inadeguate ai tempi vista la rapidità dei mutamenti sociali. Anche la prevalenza e l'irruenza del paradigma clinico-diagnostico sembrano aver provocato una sorta di depedagogizzazione della scuola.

Il nostro tempo è attraversato da profonde crisi: politica, economica, sociale, culturale, educativa, per dirne alcune. Ma la crisi è sempre prodromica a cambiamenti, anche radicali. È d'obbligo la pedagogia della domanda! Qual è il cambiamento auspicabile? Qual è il futuro che vogliamo? Quale preparazione vogliamo dare ai nostri giovani? Che adulti siamo? *La crisi dell'educazione deve essere concepita nella sua propria complessità, che rinvia alla crisi della complessità sociale e umana* (E. Morin).

Rimettere la persona al centro è il primo e indispensabile passo verso una giusta trasformazione sapendo che la persona è possibilità. A cominciare dalla scuola. Proprio qui, a scuola, è necessario il recupero dell'umanesimo in risposta al tecnocratismo dominante. Chiunque operi nel campo dei processi educativi e formativi ha la responsabilità di agire nel rispetto della persona, rifiutando ogni forma di mercificazione del sapere, quella che Paulo Freire aveva definito "pedagogia bancaria" che va affermandosi anche attraverso il linguaggio: debiti, crediti, risorse, spendibilità del titolo di studio, imprenditorialità, capitale umano e via dicendo. La cooperazione educativo-formativa rappresenta l'imperativo categorico perché «nessuno educa nessuno, nessuno si educa da solo, gli uomini si educano insieme, con la mediazione del mondo». (P. Freire)

Le parole, di questi tempi…

Le parole, di questi tempi, sembrano essersi spogliate di senso. Si ha l'impressione che a dominare sia una certa retorica mista a demagogia, cosicché tutti si sentono autorizzati a parlare di tutto alterando spesso significati, disconoscendo le etimologie in una specie di monologo ripetitivo. Così parliamo di integrazione, di inclusione, di resilienza, di merito -oggi più che mai- di tolleranza e di accoglienza vestendo gli abiti di esperti animati dal rispetto dell'alterità. In realtà è lapalissiana l'autoreferenzialità che muove i più, si coglie il forte spirito di competizione che passa anche dalla vuota oratoria, a cominciare dagli opinionisti che pervadono i mass media. La tendenza a esprimere giudizi su chicchessia, a demolire ora l'uno ora l'altro è disarmante, in una sovrapposizione di voci che non prevedono l'ascolto. Non c'è da stupirsi della crescita del fenomeno del bullismo e cyberbullismo. Alla depedagogizzazione si affianca sempre più il fenomeno della deresponsabilizzazione.

Non resta che riporre speranza nella scuola, un'auto-delega questa volta, in nome di una deontologia professionale di adulti educanti, "intellettuali trasformativi" che, seppure vittime di un mis-conoscimento sociale e istituzionale, rappresentano un'ancora di salvezza per le nuove generazioni affinché ciascuno possa occupare dignitosamente il suo posto nel mondo, salvaguardando il diritto al futuro. Non è forse questa l'inclusione? Ricominciamo dalla nostra Costituzione.

[2] MASSA R., *Cambiare la scuola. Educare o istruire?*, ed. Laterza, Roma 1997, p. 69

Chi sono oggi le persone capaci e meritevoli? Nel presente globalizzato, che cosa s'intende per inclusione? Come mai, nonostante la pluralità delle politiche inclusive, le fila degli alunni "dispersi" continuano ad aumentare? Perché gli alunni con diversabilità vengono indirizzati generalmente agli istituti professionali? Abbiamo ancora scuole di serie A e altre di serie B? Si può parlare ancora di discriminazione sociale? Che cos'è la normalità nel terzo millennio? Sono domande cruciali che meritano risposte colte, accurate e precise. Scrive uno studente:

La scuola moderna, secondo me, ha parecchi passi in avanti da fare. La prima cosa che toglierei è la differenziazione che le persone fanno tra licei e istituti professionali, come se i secondi (n.d.r. gli alunni) *fossero meno intelligenti.*

D'altra parte si fa strada un dubbio, peraltro la giusta via verso la ricerca della verità: quanto ancora abbiamo paura della diversità? Paura che si traduce in pensieri e comportamenti del tipo: "Ti includo in quanto diverso da me, ti integro nonostante tu appartenga ad un'altra cultura che non è la mia, ti tollero perché sono generoso…". Va intrapresa la strada della verità per riconoscere che una scuola autenticamente accogliente è già di per sé inclusiva! È un implicito!

Ma che cosa significa accogliere? Si tratta di una derivazione dal volgare latino: accolligere (ad+colligere), raccogliere presso di sé, ricevere uno con dimostrazione di affetto".[3]

Quindi, una scuola che accoglie è una scuola che sa ri-conoscere il Volto e distinguerlo dal personaggio (E. Lèvinas). Ci sono studenti bulli, iperattivi, distratti, svogliati, demotivati, pigri. Non sono volti, bensì personaggi oggi in balìa di una sorta di "effetto diagnosi" che silenziosamente sembra amplificare il divario tra chi viene ritenuto "normale" e chi no e che tradisce, in qualche modo, la benevolenza con cui è nata la legge 170/2010. È innegabile che assistiamo a un fenomeno di medicalizzazione dell'istruzione e della formazione denunciato da più parti e dovuto, presumibilmente, a un'interpretazione distorta o eccessivamente tecnicistica della stessa legge. Per di più preoccupa non poco che gli stessi genitori degli alunni chiedano esplicitamente una diagnosi al servizio di neuropsichiatria quando i propri figli evidenziano difficoltà nel processo di apprendimento, come a volersi garantire la promozione del figlio, liberandogli la strada da ogni ostacolo e frustrazione possibile proveniente dall'esterno. È l'effetto di un crescente fenomeno di infantilizzazione dell'adulto e di adultizzazione del bambino, che i sociologi denunciano ormai da tempo, ma potrebbe anche manifestare la totale sfiducia delle famiglie verso la scuola. Soli gli uni e gli altri. In mezzo ci sono loro: le alunne e gli alunni, in attesa che qualcuno abbia la volontà di guardare oltre. Oltre il comportamento, nient'altro che una posa, oltre l'aggressività che cela la paura, oltre la disincentivazione a studiare che nasconde il timore di non essere all'altezza del compito, oltre quel voto che spesso giudica.

Inevitabilmente entra in gioco la questione della valutazione scolastica, un'ossessiva lente d'ingrandimento, attraverso la quale passa anche il merito che rischia una distorsione della sua natura originaria quando a prevalere sono principi come la competitività, l'efficientismo, la crescita economica del paese che non è sinonimo di crescita culturale. Così, la vecchia espressione di "selezione scolastica", che oggi appare improponibile se non offensiva rischia la sua permanenza sotto "mentite spoglie". Per "capaci e meritevoli", la nostra Costituzione ha inteso senz'altro il diritto di offrire a tutti i cittadini uguaglianza di opportunità, principio in conflitto con le evidenti e macroscopiche disuguaglianze che peraltro sembrano crescere.

Meritocrazia: controverso significato di una parola

Dall'inglese meritocratcy, dal lat. meritum – merito e crazy- crazia, significa letteralmente "potere del merito". Il termine è un neologismo coniato nel 1958 da Michael Young, sociologo inglese, autore del libro "The advent of meritocracy", un racconto satirico che metteva in risalto i pericoli della

[3] https://www.etimo.it/?term=accogliere

meritocrazia. Secondo l'autore, il principio dell'uguaglianza delle opportunità, sul quale si fonda in realtà il concetto di meritocrazia, promuove invece *«[...]* una selezione basata esclusivamente sull'intelligenza […]. L'aristocrazia di nascita viene sostituita dalla aristocrazia dell'ingegno*».*[4] Tuttavia il contenuto del libro fu da subito male interpretato e il concetto di meritocrazia acquisì ben presto una connotazione positiva andando a rinforzare l'ideologia del merito. E la storia continua, fino ai giorni nostri.

Il 09 gennaio 2009, l'allora Ministra dell'istruzione Maria Stella Gelmini proclamò "ci sarà più meritocrazia"[5] sia per gli alunni che per i docenti legittimando, in altre parole, l'esistenza di una strada per i premiati e di un'altra per i puniti, grazie all'introduzione di **rigorosissimi test oggettivi (ammesso che possano considerarsi tali) e nell'ottica della meritocrazia appunto.** Gli obiettivi della riforma erano riconducibili alla promozione **della crescita economica del Paese. L'economista statunitense** Theodore William Schultz, vincitore, insieme ad Arthur Lewis, del premio Nobel per l'economia nel 1979, per "le ricerche pionieristiche nello studio dello sviluppo economico, nel 1963, propose un testo che risulta molto interessante al nostro scopo: "*Il valore economico dell'educazione*" nel quale viene introdotta l'espressione di "capitale umano". Espressione purtroppo ambigua, come tante altre, che si presta a rischi interpretativi tali da indirizzare le scelte politiche stesse.

Ivan Illich aveva già a suo tempo avanzato delle ipotesi sulle spinte economicistiche nei confronti della scuola, nonché alcune considerazioni sulle tendenze educative occidentali "viziate dalla burocrazia, dalla statistica e dal culto del professionalismo". In altre parole, secondo lo studioso, l'essere umano rappresenta una rendita sulla quale investire ai fini dello sviluppo economico. Non colpisce particolarmente l'estremismo di Illich, secondo Mauro Boarelli, dal momento che anche Papa Francesco ha affermato: *«*La meritocrazia […] sta diventando una legittimazione della disuguaglianza*».*[6] *Del resto, le fasce cosiddette fragili della popolazione difficilmente rappresentano una rendita economica per un paese.*

Come già aveva intravisto Aristotele, una politica meritocratica, conduce a forme più o meno velate di tecnocrazia oligarchica e quindi alla fallacia della democrazia. *E allora, facciamoci domande, tante domande! L'unico modo per rifiutare l'omologazione.* Chi ha il potere di stabilire il merito? Come potremo mai misurare la solidità delle competenze psicologiche, pedagogiche, didattiche dei legislatori della scuola tanto da decidere che cosa e chi è meritevole? Chi definisce i meriti? Come può rispondere la scuola all'egemonia economica?

I figli di Scampia sono capaci e meritevoli?

Chi sono i capaci e meritevoli oggi? I figli di Scampia e di tutte le altre zone periferiche del nostro Paese, per lo più trascurate se non dimenticate, sono capaci e meritevoli? Capaci senz'altro e portatori di vivida intelligenza, ma come riconosciamo il loro merito? Lo stato di abbandono, in cui spesso versano le cosiddette "fasce deboli" della popolazione, alimenta la dispersione scolastica, riempie le celle degli IPM, rimpingua le fila della criminalità, abita le comunità. Difficilmente troveremo in uno di questi circuiti, giovani appartenenti a famiglie della medio-alta borghesia. Non perché siano esenti dal commettere atti di devianza, semplicemente le loro famiglie hanno possibilità e potere di garantire, anche economicamente.

I figli di Scampia non sono che un esempio delle mille periferie dimenticate delle grandi metropoli, quelle definite "zone a rischio" o "fasce deboli", ma il concetto non cambia. Sono i giovani cittadini che non hanno condizioni economiche sufficienti e dignitose, che per sopravvivere, a volte, si dedicano ad attività illegali per le quali, spesso, occorrono intelligenza, problem solving, astuzia,

[4] BOARELLI M., *Contro l'ideologia del merito*, Bari 2019, p. 7

[5] https://www.istruzione.it/archivio/web/ministero/cs150710.htm "Il ministro dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca **Mariastella Gelmini** e **Roger Abravanel,** autore del saggio "*Meritocrazia. Quattro proposte concrete per valorizzare il talento e rendere il nostro paese più ricco e più giusto"*, hanno presentato oggi il **Piano Nazionale Qualità e Merito (PQM)"**.

[6] BOARELLI M., *Contro l'ideologia del merito*, Bari 2019, p. 108

addirittura creatività oppure, al contrario, sono giovani che smettono di studiare perché da soli non ce la fanno. Sono i "nostri dispersi" ricchi di virtù che tristemente disperdiamo insieme a loro e ai quali saccenza e pregiudizio rischiano di precludere la via verso il riconoscimento del merito. Tranne che in pochi casi come dimostrano le buone prassi dell'Istituto Tecnico "Galileo Ferraris" di Napoli, nel quale a prevalere è "il credo pedagogico". In queste situazioni non bastano i sostegni economici o le borse di studio come misure di contrasto alla povertà, in quanto sono i contesti sociali e familiari che contribuiscono a scrivere biografie spesso dolorose, storie che si ripetono e s'incancreniscono e sono proprio questi gli studenti svogliati, apatici, violenti, iperattivi, che noi adulti "disperdiamo" da una parte e dall'altra vogliamo includere. Un'enorme incongruenza.

Il pre-giudizio li precede. Sono gli studenti orientati alle scuole e/o istituti professionali, ai corsi di formazione lavoro, generalmente ritenuti inadeguati agli studi liceali o per valutazioni scarse o per povertà sociale-educativa o perché ritenuti di scarse qualità intellettive. È curioso, inoltre, che i testi adottati in queste scuole siano volutamente caratterizzati dalla semplificazione e che subiscano ulteriori "tagli di programma" ad opera dei docenti, a seguito del persistente pregiudizio che questi studenti "tanto non ce la fanno". È così che la valutazione scolastica finisce per assecondare, a priori, un'idea distorta di meritocrazia.

Alcune ricerche confermano che la meritocrazia, male interpretata, sia un ostacolo all'apprendimento e avallano l'ipotesi che essa possa creare le condizioni del conflitto sociale. Quasi un'ovvia considerazione visto che le costanti pratiche di controllo tendono a inibire e a distorcere la spontaneità degli alunni che si percepiscono sotto sistematica vigilanza e sanzione, in competizione l'uno con l'altro. Infatti, gli studenti dei corsi non liceali, avvertono essi stessi di essere vittime di ingiustizia sociale, una percezione niente affatto velleitaria alla luce dei dati riportati dalle statistiche ufficiali.

«Abbiamo bassissimi tassi di giovani laureati rispetto all'Europa, soprattutto tra le fasce meno abbienti…Nel corso dell'anno scolastico in corso (2019), il 55% dei ragazzi frequenta il primo anno di un liceo, il 30% un istituto tecnico e il 15% un istituto professionale. Solo un iscritto al liceo classico o scientifico su 10 è figlio di operai o impiegati. Chi proviene da famiglie svantaggiate, non solo in termini economici, ma anche di titolo di studio dei genitori, di fatto studia meno e quando arriva a iscriversi all'università, sceglie corsi di laurea brevi…I dati Almalaurea mostrano chiaramente che tendenzialmente chi parte svantaggiato in termini economici, ci resta».[7]

Sembra non essere cambiato molto da quando il 30 gennaio del 1987, il Consiglio Nazionale sui problemi dei minori, pubblicò "Le linee programmatiche per una politica unitaria dell'Infanzia e dell'Adolescenza". Alla pagina 17 si legge testualmente: «Tuttora si manifestano gravi fenomeni di abbandono scolastico, specialmente nel mezzogiorno, con gravi conseguenze sul piano della devianza e della criminalità minorile. L'insuccesso scolastico costituisce spesso la prima tappa di una carriera di esclusione dai rapporti sociali significativi […]». Sono trascorsi molti anni e di rapporti simili ne abbiamo letti un'infinità e ancora ne leggeremo. Sembrano tutti uguali, i problemi non cambiano, i propositi sono più che lodevoli in ciascuno di essi. Abbiamo assistito a una proliferazione di leggi, decreti, circolari e provvedimenti. Tuttavia, dopo decenni, che cosa è cambiato significativamente e concretamente? Siamo riusciti, ad oggi, a garantire "gradi alti di istruzione ai capaci e meritevoli anche se privi di mezzi"? Perché aumentano le disuguaglianze sociali? Se si trattasse solo di garantire sussidi economici, avremmo risolto il problema secondo quanto esplicitato dall'articolo 34 della nostra Costituzione. Le radici del fenomeno, evidentemente, vanno cercate nel tessuto sociale, culturale, politico e richiedono finalmente una riflessione accurata e responsabile, etica.

[7] https://www.infodata.ilsole24ore.com/2019/01/04/laurea-ricchi-apprendistato-poveri-non-la-strada-verso-la-parita/

Meritocrazia e competizione

La meritocrazia ha un grande impatto sulla percezione di sé di un giovane e, quindi, sulla crescita della propria autostima e del suo senso di autoefficacia, ovvero della convinzione delle proprie capacità di organizzare, realizzare piani, azioni, fasi del proprio unico e speciale progetto di vita. Tuttavia la cifra del nostro tempo sono la misura, la velocità, la conquista di una nuova alfabetizzazione: quella tecnologica. A. Bandura sottolinea che «le convinzioni delle persone circa la propria efficacia disegnano il tipo di scenari futuri che vengono costruiti ed esplorati nell'immaginazione. Coloro che dubitano della propria efficacia vivono scenari di fallimento a priori e si convincono di non meritare il meglio»[8]. Mai come in questo tempo il principio del merito ha percorso ogni attimo esistenziale. Non solo. Si ha proprio l'impressione che esso si presti a una lettura piuttosto ambigua e implichi la competitività che, quando esasperata, non permette la libera espressione della persona, ostacola l'apprendimento, provoca logorìo, preclude il sogno di realizzazione personale inibendo i talenti anziché valorizzarli.

L'etimologia definisce la competizione come un *andare insieme, un convergere, un andare verso,* eppure la parola è stata gradatamente spogliata del suo significato positivo a seguito del lessico dominante di tipo aziendalistico. La competizione è diventata rivalità vera e propria e trasforma il soggetto in un individuo oltremodo ambizioso e privo di empatia verso l'altro, provoca accanimento verso l'obiettivo da raggiungere e procura uno stato di perenne insoddisfazione quando il soggetto si pone mire sempre più alte. La scuola non ne è rimasta indenne. La scuola azienda, la scuola che deve formare al collocamento professionale, soggetta a un surplus di richieste sempre più incalzanti, invasa dal burocratese, che deve agire nell'ottica della crescita economica è fortemente soggetta al principio di competitività: l'imperativo efficientista. In essa s'incrementano stati di ansia, di impulsività, di stress sia negli studenti che nei docenti e famiglie, in contraddizione con i principi di: sviluppo dell'autonomia, dell'autoefficacia e delle intelligenze degli alunni. Così che il sistema meritocratico distorto si rinforza nell'assuefazione, rischia di perpetuare le differenze sociali di partenza. Risuonano limpide le parole di L. Milani: "La scuola: un ospedale che cura i sani e respinge i malati".

L'inclusione: un diritto naturale per tutti

Scuola delle competenze, scuola della legalità, scuola di cittadinanza, scuola inclusiva e avanti così. Perché tante espressioni? La scuola è una, è semplicemente scuola, scholè, un termine caduto nell'oblio.

Il nostro Paese annovera alcuni tra i più famosi pedagogisti della storia dell'educazione che ci hanno lasciato un vero patrimonio in termini di esperienze, letteratura scientifica e ricerca. Una ricerca che deve continuare a proliferare, che non è tecnicismo, né gratuito implemento di nuove tecnologie, né solo collocamento di risorse nel tessuto economico. Sarebbe l'evidente strumentalizzazione dell'Educazione. La scuola italiana dovrebbe andare fiera di sé, in quanto scuola che ha saputo e sa come riconoscere il merito della persona in età evolutiva, che sa come si agisce in funzione dell'empowerment, che ha ben chiaro il principio della meritorietà, ovvero il criterio del merito, attraverso il quale *«sono gli insegnanti, non più i grandi flussi della storia […] a continuare a far valere la ricchezza, la densità e la bellezza dell'esperienza educativa […]».[9] Ma è necessario liberare gli insegnanti dall'aggravio burocratico che sottrae tempo prezioso alla relazione educativa, al dialogo, all'incontro, all'ascolto, a coltivare passione per il sapere e per la conoscenza, a far innamorare gli studenti alla Cultura, all'Arte e alla politica intesa come pòlis e imparare così a pensare, a scegliere, a capire per comprendere. Questa è l'inclusione. Un diritto naturale per tutti.*

Ma si ha l'impressione che a prevalere sia il "potere del merito" che è stato definito, appunto, come la nascita di una nuova aristocrazia, quella dell'ingegno che rafforza le disuguaglianze sociali.

---

[8] BANDURA A., *Il senso di autoefficacia*, Erickson, Trento 1996, p. 19

[9] MASSA R., *Cambiare la scuola. Educare o istruire?* ed. Armando, Roma 1997, p. 63

Il potere del merito è un criterio definito secondo la formula $m = IQ + E$, dove m sta per merito, IQ per quoziente di intelligenza, E per sforzo. Il merito rappresenta la risultante di due elementi: il talento naturale e l'impegno del soggetto. Ma il quoziente intellettivo sappiamo che può dipendere anche dal background socio-culturale di provenienza, mentre lo sforzo viene qualificato in relazione alle caratteristiche culturali della società in cui opera e si sviluppa la persona. Sappiamo anche che la medesima abilità personale e il medesimo sforzo vengono valutati in modo differente a seconda dell'*ethos* pubblico preponderante nella società. Ecco che il principio della meritocrazia comporta esso stesso il pericolo dell'esclusione sociale.

È inevitabile il dubbio che la schiera degli alunni con Bisogni Educativi Speciali, diagnosticati, o con disabilità, peraltro in sensibile aumento, possa subirne le conseguenze in termini di disistima, scarso senso di autoefficacia, minori possibilità di autorealizzazione personale. Ma, ripeto, se il dubbio è la via verso la ricerca della verità, è doveroso riflettere e poter, eventualmente, modificare il paradigma clinico dominante e affermare: "Cresci come persona, rendi significativa la tua esistenza, scopri chi sei e che cosa vuoi, sii consapevole di essere protagonista della tua vita, una vita che ha sempre valore e sarai anche un buon cittadino. Te lo meriti!".

Ritengo sia necessario andare ancora più a monte, per individuare ulteriori pre-giudizi che sbarrano la strada verso il riconoscimento del merito, per esempio alle attuali iniziative di orientamento scolastico che si propongono alle scuole medie inferiori per individuare negli alunni attitudini particolari in vista della scelta del grado d'istruzione successivo. Appare già discutibile che all'età di 13-14 anni gli alunni siano in grado di dare una direzione professionale alla loro vita, in una società confusa e in crisi essa stessa. I ragazzi, il più delle volte, si sentono costretti a scegliere secondo le richieste del mercato del lavoro, sostenuti anche dalle famiglie che conoscono bene la crisi occupazionale. In buona parte dei casi sarà la valutazione scolastica a condizionare una scelta di futuro: liceo, o istituto, o scuola professionale e… il destino sembra già prefigurarsi. Da una parte i bravi e meritevoli di accedere anche agli studi universitari, dall'altra quelli da preparare al mondo del lavoro, bene o male. I nostri nonni direbbero: "Mica tutti possono diventare dottori! Qualcuno dovrà lavorare nei campi!". Certo! Purché ogni alunno sia posto nelle condizioni di realizzare un sogno, di scegliere, di dare forma al suo progetto di vita, soprattutto senza penalizzare in alcun modo il diritto all'istruzione quindi alla cultura, elementi che ci rendono cittadini del mondo, in primis attraverso la padronanza linguistico-espressiva.

Occorre la consapevolezza che una trasformazione sia ormai necessaria, un desiderio di cambiamento che parte anche da noi che abitiamo la scuola, dalla nostra volontà di liberarci dall'ottica economico-aziendalistica, dal piacere di svolgere uno dei mestieri più appassionanti, dall'aver scelto il mestiere di Educare, tutt'altro che facile, dalla consapevolezza che ogni alunno è meritevole di un domani buono. Perché ciò sia possibile è necessario riscoprire e valorizzare **un'etica del linguaggio educativo,** che sia condiviso nel segno di un dialogo costante, costruttivo e proficuo. Per un agire educativo che sia legittimo e responsabile dobbiamo recuperare i significati delle parole che utilizziamo quotidianamente nei contesti formativi.

Contemplare i… valutati per, "naturalmente", includere

Vorrei una scuola che trasmettesse ottimismo e voglia di vivere
(un'alunna)

Contemplare è un termine che non deve suscitare né sorriso, né stupore nel nostro caso. Ci mancherebbe – direbbe qualcuno- che ci mettiamo a contemplare gli alunni! Ma l'etimologia di "contemplare" è tutt'altro che lontana dalle aule. Dal lat. *contemplāri*, rimanda a *attrarre qualcosa nel proprio orizzonte, osservare*. Ebbene, non è forse giunto il momento che gli adulti educanti contemplino questi nostri ragazzi? irruenti, aggressivi, poco educati, irriverenti, chiusi in sé stessi, ostili, ribelli, incalzanti, scontenti, annoiati. Ma gli adolescenti sono sempre stati così, fa parte del cammino, eppure oggi ci preoccupano, ci fanno quasi paura, ci sentiamo disarmati. Chi è cambiato? Noi oppure loro? Oppure entrambi? Che cosa ci vogliono dire? Sono orgogliosi di sé e hanno dignità, stanno a guardarci, ci giudicano, a loro volta, con sguardi persino indisponenti in attesa che impariamo a leggere i loro volti, non per buonismo, ma perché abbiamo il dovere di renderli forti e attrezzati alla vita, di formarli a un pensiero critico e alla capacità di scegliere, di educarli a esistere, a stare dentro il mondo consapevolmente e attivamente.

L'etimologia della parola giudicare è da ricondurre al latino judĭcare, derivazione di judex, giudice. Judex deriva dall'unione di ius + decs (dicere) cioè colui che dice, che si pronuncia sul diritto. In senso più ampio, giudicare significa valutare, stimare, esprimere un'opinione.[10]

Giudicare, esprimere un'opinione, stimare: operazioni tra le più complesse dove i termini "giudicare" e "valutare" sembrano sovrapporsi o confondersi, così che "dare un giudizio" è inteso come "dare valore". Per esempio, la parola "giudizio", pur riguardando diversi ambiti semantici, rimanda non poco a contesti giudiziari, dove il giudice emana le sentenze coadiuvato da una giuria e da consulenti tecnici d'ufficio. Eppure, nonostante ciò, di errori giudiziari è piena la storia dell'umanità.

Anche la scuola esprime giudizi. La domanda quasi quotidiana degli studenti, ossessionati dalla valutazione, è: "Prof., quanto mi ha dato?", "quanto ho preso?". Se soffermiamo la nostra attenzione sui pronomi, ci rendiamo conto che essi giocano un ruolo determinante nella comunicazione educativa, soprattutto in età evolutiva. Quel "mi" evidentemente coinvolge l'essere stesso, la persona e non il compito che è il reale oggetto da valutare. Può sembrare un'inutile osservazione, si dirà che è scontato. Eppure, secondo quanto espresso dagli studenti che ascolto, le valutazioni assegnate dal docente vengono vissute come espressione di valore sulla persona, difficilmente modificabile nel tempo e che solo un eventuale cambio di docente disciplinare nel corso degli anni scolastici potrà, forse, modificare. Per quanto faticoso e in virtù del ruolo professionale che ricopriamo, non possiamo non tenere conto delle testimonianze degli alunni. Un impegno che non mette affatto in discussione il nostro senso di efficacia o la nostra autorevolezza, anzi, ne usciremo arricchiti e più realizzati, capaci di viverci come **"intellettuali trasformativi"** *«cioè un soggetto capace di assumersi la responsabilità di provocare cambiamenti nell'ordine esistente per contribuire alla costruzione di una migliore qualità della vita».*[11]

Verso un'etica pedagogica della valutazione scolastica

Insomma, tanti sono gli studi compiuti e in divenire, i saggi scritti da autorevoli esperti che mettono in risalto la necessità di una pedagogia della valutazion**e** volta a superare un certo didattismo docimologico ormai esasperato con un'altrettanta esasperata pretesa di oggettività. "Nessuna valutazione, seppure ancorata ai migliori criteri di scientificità, sarà mai oggettiva. Essa, infatti, si basa su un elemento ideale costruito da un soggetto e su un elemento fattuale che, in realtà, viene selezionato dallo stesso soggetto".[12]

*«*Trattare la valutazione pedagogicamente significa prima di tutto saperla riconoscere e distinguere, anche all'interno di quelle procedure che normalmente chiamiamo di valutazione. Quando sto valutando? Quando sto analizzando? Quando sto decidendo? Quando sto esercitando forme di controllo?*»* .[13]

Una pedagogia della valutazione ha lo scopo di evitare l'abuso e l'irrigidimento dell'atto valutativo e mira a raggiungere un'etica del valutare finalizzata, coscientemente, a contrastare la logica economica che rischia di invadere il luogo educativo "scuola". Non si può accondiscendere a un implicito rafforzamento del criterio della selezione sociale e scolastica, né alla standardizzazione del

[10] https://www.etimoitaliano.it/2014/01/etimologia-della-parola-giudicare
[11] MORTARI L., *Apprendere dall'esperienza*, Carocci, Roma 2020, p. 65
[12] BOBBIO A., SCURATI C., *Ricerca pedagogica e innovazione educativa*, Roma 2008, p.142
[13] Ibidem, p. 142

sapere, che favorisce forme di esasperato individualismo e di competizione. Anche la didattica per competenze, promosse dall'Unione Europea,[14] meriterebbe un'accurata riflessione.

Quale futuro garantiamo ai giovani? Quanto peso ha la scuola sulla costruzione del loro progetto di vita? Quanto possiamo essere oggettivi? Come assegnare i voti? È giusto bocciare? Il portfolio dello studente che valore assume? Infine, parafrasando Kant, chi educherà gli educatori a valutare diversa-Mente? Non può bastare essere diventati bravi elaboratori di griglie valutative, oggi occorre altro, per esempio una pratica dei laboratori di epistemologia riflessiva che consiste «nella capacità di monitorare i propri processi cognitivi portando alla luce le reti di assunzioni implicite entro le quali il pensiero tende a rimanere impigliato».[15]

Prof., quanto mi ha dato?

"Prof., quanto mi ha dato?", "quanto ho preso?". Si tratta di espressioni che rivelano l'aspettativa mista ad ansia e la resa a un giudizio che implicitamente coinvolge la persona. Rispondere all'aspettativa dell'insegnante è importante per l'alunno che sa perfettamente decodificare ogni singola espressione, verbale o paraverbale. Le parole e la metacomunicazione, soprattutto in età evolutiva, entrano nel tessuto cognitivo e psichico al punto da convincere l'alunno di "valere" quanto qualcuno ha deciso, di essere o non essere meritevole. Non sono rare le situazioni di vero e proprio disagio scolastico. Si obietterà che è sempre andata in questo modo, che siamo tutti quanti sopravvissuti alle frustrazioni provocate dalla scuola e che gli studenti, per imparare, devono essere valutati attraverso giudizi rigorosi. Scelgo di rispondere con le parole di Riccardo Massa, docente e studioso di pedagogia, autore di molti saggi. A obiezioni simili, durante un'intervista, rispose: *«Non ho detto che la scuola non deve valutare e non deve imporre regole determinate. Ho detto che ridurre a questo la sua natura è inaccettabile. Che il modo in cui continua a essere fatto non è più tollerabile. Sono la persistenza e il disfacimento di questo dispositivo a devastare i ragazzi. La sua estenuazione e il suo esaurimento […] La scuola deve tornare a essere un'istituzione educativa anziché un esamificio o un testificio in disuso con qualche interrogazione di tipo tradizionale».*[16] Una riflessione che condivido pienamente, testimoniata dagli stessi ragazzi, i quali non chiedono voti regalati, promozioni facili, percorsi leggeri. Niente affatto.

Ogni parola è un universo di significati e l'etimologia di ognuna ci restituisce una inimmaginabile ricchezza di elementi. Per esempio la parola "parola" deriva dal latino parabola. Infatti, originariamente significava più genericamente un esempio, una similitudine, un racconto in senso lato[17]. La parola è dunque un racconto. Un insieme di parole è un racconto più complesso, fatto di aspettativa e di emozioni, di sorriso o di pianto, di rabbia o di gioia. Ciò significa che le parole vanno ben scelte, ben usate.

"Quanto ho preso?", "Che voto ha assegnato al lavoro?": sono racconti differenti che narrano entrambi un'esperienza di lavoro dove la relazione intersoggettiva cambia. Il compito, una lezione sono esperienze di lavoro.

La valutazione, posta in questi termini, diventa discussione, integrazione di elementi, spiegazione, ascolto e comprensione del processo metacognitivo, motivazione, gratificazione. Così i ragazzi non perdono la passione verso il fare esperienza, verso il lavoro. «Passione significa non soltanto desiderio, ma anche sforzo, impegno e qualche volta anche sofferenza».[18] Ecco perché stabilire la relazione educativa è la priorità, definita da G. Bateson "una danza connettiva della relazione" dove ciascuna delle polarità di ogni distinzione si produce attraverso l'altra, circolarmente, per reciprocità (G. Bateson, 1976). Alcuni filosofi hanno dedicato molte riflessioni al tema della intersoggettività, a

---

[14] https://ec.europa.eu/education/policies/european-policy-cooperation/development-skills_it
[15] MORTARI L., *Apprendere dall'esperienza*, Carocci, Roma 2003, p. 69
[16] MASSA R., *Cambiare la scuola. Educare o istruire?* Roma 1997, pp. 172,174
[17] https://www.etimoitaliano.it/2010/09/etimologia-della-parola-parola.html
[18] HECKAMN J.J, KAUTZ T., *Formazione a valutazione del capitale umano*, Bologna 2016, p. 19

partire da I. Kant con la sua domanda: "Che cosa posso conoscere?", da E. Husserl quando parla di rischi della soggettività inconsapevole e sostiene "le cose come le vediamo noi non necessariamente sono le cose come stanno", da H. G. Gadamer che scrive "…nessuno conosce sé stesso. Portiamo da sempre in noi impressa una traccia e nessuno è un foglio bianco", come a dire che in ognuno c'è una sorta di memoria culturale ed è impossibile liberarsi dai nostri pre-giudizi, o dagli "idola" (Bacone). Sono temi tanto affascinanti quanto essenziali e meriterebbero approfondimenti che tuttavia rimandiamo ad altra sede.

Test, questionari, quiz: quale valutazione?

«Uno sguardo svagato, disattento e distratto…uno sguardo incapace di considerazione costante… uno sguardo sbrigativo…impaziente… prevenuto… si rende incapace di quell'interesse e di quel rispetto che soli rendono possibili l'attenzione necessaria per interpretare».[19]

Alcune ricerche confermano che è fuorviante pensare che test, quiz e questionari di vario genere siano esenti dai pericoli distorsivi e quand'anche così non fosse non rappresentano strumenti adeguati ad alimentare la motivazione verso il sapere e la conoscenza, il pensiero critico e la riflessione. Essi non tengono sufficientemente conto delle caratteristiche della personalità, degli stili di apprendimento, della creatività naturale, dei processi metacognitivi, delle personali intelligenze e attitudini e incrementano, piuttosto, processi di omologazione e standardizzazione. Risultano interessanti al nostro scopo gli studi di Heckaman e Kautz, due economisti, seppure non recentissimi. Gli autori mettono in guardia dal pericolo di considerare solo le capacità cognitive ignorando il ruolo del character (character skills), ovvero dello sviluppo della personalità nelle sue diverse dimensioni. «La standardizzazione dell'insegnamento, conseguente a un appiattimento su conoscenze mnemoniche, invece di valorizzare i meritevoli ancorché privi di mezzi, di fatto contribuisce a una omologazione culturale che perde di vista la crescita della personalità e rende inadeguati alla vita lavorativa e alla vita adulta in generale»[20] e aggiungono che «…una scuola standardizzata e appiattita su conoscenze mnemoniche è perdente anche dal punto di vista della pretesa funzionalista di formare persone pronte alla riuscita nel mondo produttivo e del lavoro».[21]

L'ambizione oggettivistica non paga, né in un senso, né nell'altro. Inutile sacrificare valori quali la reciprocità, l'incontro dialogico, la noità a favore di un'ipocrita solidarietà sociale che, in realtà, annulla l'individuo.

La soggettività intesa come individualismo, può essere superata solo aprendosi ad altri orizzonti che conducono all'intesa, concetto caro a J. Habermas e in tal senso essa diventa potenzialità.

È possibile una scuola senza voti?

Il maestro e pedagogista Alberto Manzi si era rifiutato di assegnare i voti ai propri alunni, mentre Mario Lodi scriveva: «La scuola la vorrei senza pagelle e con tante cordiali chiacchiere con i genitori, perché, alla fine, invece di una bella pagella, si abbia un bel ragazzo, cioè un ragazzo libero, sincero, migliore» e ancora Lorenzo Milani desiderava una scuola senza voti né bocciature, aperta a tutti con il solo scopo di prendersi cura dei suoi ragazzi. Il suo motto, ormai noto, era I Care. Il tema della valutazione scolastica e dei suoi impliciti l'aveva ampiamente trattato con i suoi ragazzi nel libro "Lettera a una professoressa" che andrebbe riletto e proposto per una bella riflessione.

Senza andare troppo in là nel tempo, anche in Europa, oggi, si sperimentano percorsi scolastici senza voto almeno fino alla preadolescenza. Il modello più conosciuto è quello finlandese.

«In Finlandia la valutazione dei ragazzi è basata su una filosofia del tutto diversa: ogni studente viene giudicato a partire dalle sue stesse abilità e dal potenziale che ciascuno possiede secondo il parere del

[19] PAREYSON L., *Estetica e teoria della formatività,* Torino 1974

[20] Ibidem, p. 21

[21] Ibidem, p. 21

singolo insegnante. In Finlandia un 8 (in una scala da 4 a 10) significa che si è migliorati, che in base alla propria condizione di partenza e alla propria situazione personale c'è stata un'evoluzione positiva. In Finlandia ci si fida degli insegnanti esattamente come ci si fida di un dentista, di un medico, di un avvocato o di qualsiasi altro professionista. Da noi nessuna autorità esterna interviene sulla diagnosi che un medico ha fatto del suo paziente. Allo stesso modo non esiste un'organizzazione che abbia il compito di giudicare il lavoro di un insegnante».[22] Si tratta di un'impostazione certamente di buona pedagogia. Innegabile che vi siano pro e contro ma risulta positivo l'aver messo in discussione una modalità per un'altra senza dubbio alternativa e coraggiosa. D'altronde l'umanesimo non ha certezze e richiede ricerca continua, una ricerca olistica che non perda di vista i contesti, le emozioni, le fragilità di ogni persona dis-orientata dalla frammentazione e impotente di fronte allo sgretolamento del pianeta.

Scuola e famiglia restano le istituzioni educativo-formative essenziali. Vanno sostenute con politiche adeguate e "umane". Le vite che a loro si af-fidano meritano riconoscimento, meritano di esistere con dignità, meritano di meritare il meglio possibile, nessuno escluso. Utopia? Forse, ma il fine della pedagogia è realizzare l'utopia. Forse è per questo che la scienza dell'educazione e della formazione fa così paura, tanto da marginalizzarla?

Per il momento riponiamo il credo pedagogico nella scuola, nella consapevolezza che insegnare non è facile (De Bartolomeis) e che non è un mestiere per tutti né di ripiego. Per il momento facciamo appello all'accoglienza, quella autentica, libera da pre-giudizi, da pre-concetti nella convinzione che ogni studente-persona che entra a scuola per abitarla, è portatore di ricchezza, di doni. Intanto predisponiamoci al cambiamento che deve avvenire prima di tutto dentro di noi, per saper accogliere. Solo così saremo naturalmente inclusivi. È una questione etica!

Ringraziamenti

Un grazie di cuore va al Grimed per l'impegno con cui da sempre affronta i temi educativi. Ringrazio in particolare il prof. Roberto Imperiale per la sapienza, la passione, l'esuberanza del magister e la disponibilità a condividere itinerari e ricerche; ringrazio la prof.ssa Chiara Cateni per la sua dedizione e la delicata attenzione comunicativa e relazionale, elementi che permettono la crescita e la fioritura della cultura pedagogica; ringrazio Brunetto Piochi, una guida attenta; ringrazio, infine, tutti coloro che a vario titolo hanno fatto dell'Educazione e della Formazione la propria mission, al di là di ogni appartenenza associativa.

Bibliografia essenziale

Il presente contributo fa ampio riferimento al testo:
PIARULLI L., LANDINI SABA G., SPANO I., 2021, Prof… quanto mi hai dato? Etica e pedagogia della valutazione scolastica, Torino: Golem
Parte Prima, Oltre il giudizio c'è la pedagogia. Siamo capaci. Siamo meritevoli. Nessuno escluso, di Luisa Piarulli

BANDURA A., 1996, Il senso di autoefficacia, Trento: Erickson

BOARELLI M., 2019, Contro l'ideologia del merito, Bari: Laterza

[22] https://www.tuttoscuola.com/finlandia-un-modello-scuola-alternativa/

BOBBIO A., SCURATI C., 2008, Ricerca pedagogica e innovazione educativa, Roma: Armando

DE BARTOLOMEIS F., 1987, Le attività educative, Firenze: La Nuova Italia

LÉVINAS I., 2012, Etica e infinito, Roma: Castevecchi

MASSA R., 1997, Cambiare la scuola. Educare o istruire? Roma: Libri del Tempo Laterza

MORIN E., 2015, Insegnare a vivere. Manifesto per cambiare l'educazione, Milano: Raffaello Cortina

MORTARI L., 2020, Apprendere dall'esperienza, Roma: Carocci

HECKAMN J.J, KAUTZ T., 2016, Formazione e valutazione del capitale umano, Bologna: il Mulino

PAREYSON L.,1974, Estetica e teoria della formatività, Torino: Sansoni

PIARULLI L., 2019, Tempo di educare, tempo di esistere. Verso una pedagogia dell'esistenza, Torino: Golem

LA MATEMATICA DELLA LOGISTICA: CICLI EULERIANI, POSTINI CINESI E COMMESSI VIAGGIATORI

Alessandro AGNETIS[1], Giovanni RIGHINI[2], Marco TRUBIAN[2]

[1] Università degli Studi di Siena (SI), Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche

[2] Università degli Studi di Milano (MI), Dipartimento di Informatica

Riassunto

In questo contributo ci soffermiamo su alcuni problemi matematici fondamentali caratterizzati dal fatto di immediata comprensione ma di non altrettanto immediata soluzione. Attraverso l'analisi di questi problemi è possibile, oltre che avvicinare le persone alla matematica stimolandone la curiosità, anche mostrare come certi problemi reali, a prima vista complicati, siano affrontabili tramite un approccio razionale, consistente nell'applicazione di molti "semplici" passi in modo corretto.

Introduzione

La ricerca operativa è quella branca della matematica – dai contorni un po' sfumati – che studia modelli matematici per le decisioni. La sua natura applicativa può essere utilizzata per avvicinare molte persone a pensare ai problemi con un approccio matematico. In alcune esperienze condotte presso le scuole, è stato possibile partire da problemi astratti e, per così dire, stilizzati, avvicinandosi via via a specifici problemi applicativi, mantenendo un approccio rigoroso ma allo stesso tempo comprensibile. Un punto fondamentale, per chi si occupa di matematica applicata, è quello di riuscire a far comprendere la differenza tra decisioni e obiettivi, tra modello matematico e algoritmo risolutivo, in modo da indurre un metodo analitico allo stesso tempo rigoroso e chiaro.

La teoria dei grafi si presta particolarmente bene a quest'opera di "divulgazione concettuale", in quanto molti problemi in questo campo possono essere formulati in termini facilmente comprensibili da chiunque, mentre la loro soluzione è invece molto meno ovvia. Nel seguito vedremo brevemente due esempi di problemi, aventi le loro radici nella teoria dei grafi, da cui sono nati filoni scientifici e applicativi ancora estremamente prolifici: problemi di routing (partendo dal concetto di ciclo euleriano) e cicli hamiltoniani. Nel primo dei due casi, vedremo anche in dettaglio un esempio di problema applicativo articolato ma ancora abbastanza semplice da potervi impostare un'attività di divulgazione matematica con gli studenti delle scuole.

I ponti di Königsberg

L'origine della teoria dei grafi viene comunemente fatta risalire ad Eulero, che pose in termini astratti e generali un quesito molto semplice ma di non ovvia soluzione. Königsberg (che all'epoca faceva parte della Prussia, mentre oggi è territorio russo col nome di Kaliningrad), è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti, e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Molti si chiedevano se fosse possibile partire da un punto della città, percorrere esattamente una volta i sette ponti e tornare al punto di partenza. Nel 1736, nel periodo in cui lavorava presso l'Accademia di San Pietroburgo, Eulero si interessò del quesito e ne fornì una soluzione che ebbe il merito di aprire, appunto una nuova e fertilissima branca della matematica.

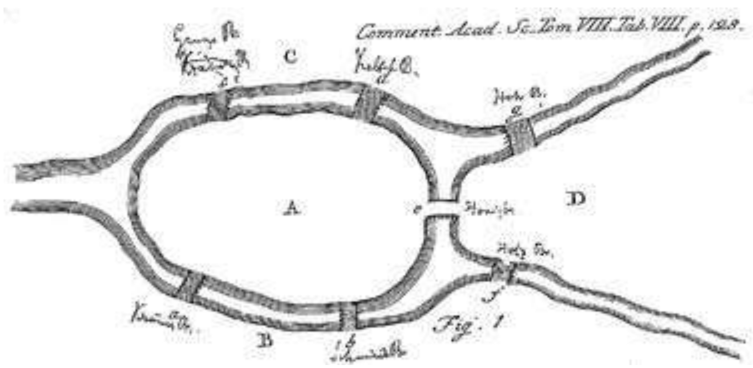


Figura 1. La città di Königsberg ed i suoi sette ponti nel 1736 (Wikimedia Commons).

Anzitutto, al di là delle rappresentazioni pittoriche, il quesito si può vantaggiosamente porre creando un modello del problema consistente in un grafo (ovvero, una relazione binaria): in questo grafo, i nodi corrispondono alle quattro zone rilevanti (ai fini del nostro problema) in cui risulta suddivisa Königsberg, e gli archi corrispondono ai sette ponti che mettono in comunicazione tali zone, come in Figura 1. Il problema, dunque, consiste nel chiedersi se sia possibile, partendo da uno qualsiasi dei quattro nodi, percorrere ciascun arco del grafo una volta sola e tornare sul nodo di partenza. Un percorso che inizia e finisce sullo stesso nodo si chiama ciclo. Dunque, si tratta di capire se esiste un ciclo che usa ciascun arco del grafo esattamente una volta (Si noti che il problema equivale a chiedersi se sia possibile disegnare tutti gli archi del grafo con una penna senza staccare mai la penna dal foglio, e senza "ricalcare" un arco già disegnato.)

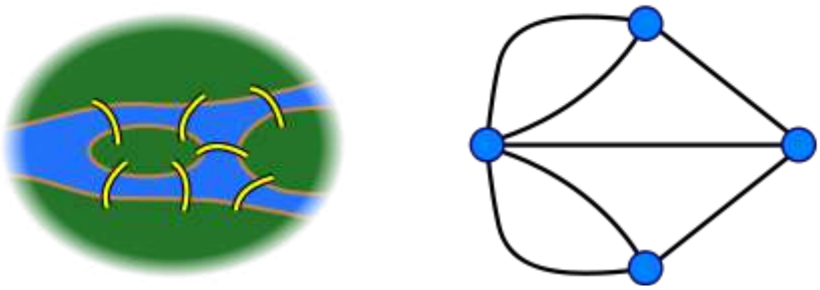


Figura 2. Il grafo del problema dei ponti di Königsberg (Wikimedia Commons).

Come fece Eulero a risolvere il problema? Egli considerò il grado dei quattro nodi, cioè il numero di archi incidenti ciascuno di essi. Indicando con Nord, Sud, Est e Isola le quattro zone della città (e quindi i relativi nodi del grafo), osserviamo che il grado di questi è rispettivamente pari a 3, 3, 3 e 5.

Ora, se noi vogliamo trovare un ciclo del tipo descritto, osserviamo che, percorrendo il ciclo, ogni nodo viene raggiunto e lasciato un ugual numero di volte, e ogni volta, per entrare o uscire da un nodo, devo usare un arco diverso. Quindi il numero di archi usati per visitare ciascun nodo lungo il ciclo è pari al doppio del numero di volte che un nodo viene visitato, e quindi è un numero pari. Quindi, affinché ogni arco del grafo venga percorso esattamente una volta, è necessario che tutti i nodi abbiano grado pari. Se guardiamo la Figura 2, a Königsberg non è così: tutti i nodi hanno grado dispari! E dunque, una passeggiata sui sette ponti del tipo descritto non è possibile: se li vogliamo percorrere tutti, dovremo per forza percorrerne almeno uno più di una volta.

Al di là dell'istanza specifica dei ponti di Königsberg, possiamo porci evidentemente per qualsiasi grafo il quesito sull'esistenza di un ciclo del tipo descritto, che, in onore del grande matematico, è stato chiamato ciclo euleriano. La condizione formulata da Eulero vale per qualsiasi grafo? La risposta è sì, ed è abbastanza semplice dimostrare che la condizione sul grado dei nodi non solo è necessaria, ma è anche sufficiente (purché il grafo sia connesso) per l'esistenza di un ciclo euleriano, per qualsiasi grafo. Se un grafo ammette un ciclo euleriano, è

consuetudine dire che il grafo è euleriano. Dunque, ricapitolando: un grafo è euleriano se e solo se tutti i suoi nodi hanno grado pari.
Si noti che una versione per così dire rilassata del problema dei ponti di Königsberg potrebbe consistere nel chiedersi se esiste un cammino (e non un ciclo) in grado di percorrere tutti i ponti esattamente una volta, ma terminando il cammino eventualmente in un nodo diverso da quello di partenza. Ci si potrebbe cioè chiedere se il grafo presenta un cammino euleriano, anziché un ciclo euleriano. E' facile vedere che anche a questa domanda è possibile rispondere facilmente, modificando la condizione di Eulero: se un grafo non è euleriano, esiste comunque un cammino euleriano se e solo se esistono esattamente due nodi di grado dispari e tutti gli altri nodi hanno grado pari. Ovviamente i due nodi di grado dispari corrispondono all'inizio e alla fine del cammino.
Se lo studio dei cicli euleriani e dei concetti correlati ha avuto una grande importanza è anche a causa delle implicazioni applicative che risultati di questo tipo hanno. Ed è qui che si entra propriamente nel campo della ricerca operativa, il cui scopo è quello di studiare problemi e modelli che nascono per far fronte a problemi decisionali reali. A questo punto infatti possiamo introdurre un problema reale (magari leggermente semplificato, anche se non negli aspetti più significativi) e andare a vedere come l'approccio logico-matematico possa fornirci la guida per affrontare problemi tratti dalla realtà in modo rigoroso ed efficace.
Nel seguito presentiamo un problema proposto negli anni scorsi ad alcune classi di scuole secondarie superiori di Milano e Lodi. A partire dal problema reale, si deriva la sua formalizzazione matematica e di conseguenza l'approccio risolutivo. Questo esempio è utilizzato in modo interattivo, cercando di individuare insieme il percorso logico che porta dalla descrizione di un problema in linguaggio naturale alla sua formalizzazione matematica e quindi alla sua risoluzione.

Il postino del quartiere Martinetta

La Figura 3 mostra la mappa stradale del quartiere Martinetta della città di Lodi. Ogni giorno dall'ufficio postale che si trova nel centro della città un postino deve recarsi nel quartiere e distribuire la posta a tutti gli indirizzi. Per farlo, egli deve percorrere tutte le strade del quartiere. Il postino può distribuire la posta su entrambi i lati di ogni strada percorrendola una volta sola. Per ottimizzare il tempo a sua disposizione, egli vorrebbe trovare il percorso di minima lunghezza.

Figura 3. Mappa stradale del quartiere Martinetta (fonte: Google Maps).

Dalla mappa del quartiere ricaviamo il grafo stradale, composto da nodi e archi (Figura 4). Alcuni archi sono orientati (sensi unici) mentre altri non lo sono. Nel passaggio dalla mappa al grafo abbiamo tenuto conto di alcuni aspetti rilevanti per il nostro problema decisionale:

- tutte le strade in entrata e uscita dal quartiere sono state troncate ad un certo punto (a seconda della presenza o assenza di abitazioni);
- le strade secondarie o private sono state trascurate;
- i sensi unici sono stati rappresentati, ma li trascureremo nel risolvere il problema, in quanto il postino, procedendo in bicicletta può anche pedalare contromano nelle strade a senso unico (anche in considerazione del fatto che c'è tipicamente poco traffico nel quartiere).

Tutti i nodi del grafo sono stati numerati per identificarli con maggiore comodità e in modo non ambiguo. I numeri dei nodi sono scritti in blu nella Figura 4. Infine, a tutti gli archi del grafo è stato associato un costo, che rappresenta la lunghezza del corrispondente tratto stradale, in un'opportuna unità di misura. Il costo di ogni arco è scritto in rosso nella Figura 4, di fianco all'arco corrispondente.
Abbiamo così ottenuto un grafo con 29 nodi e 34 archi. Abbiamo indicato con il numero 1 il nodo del grafo da cui deve iniziare e in cui deve terminare il percorso del postino.

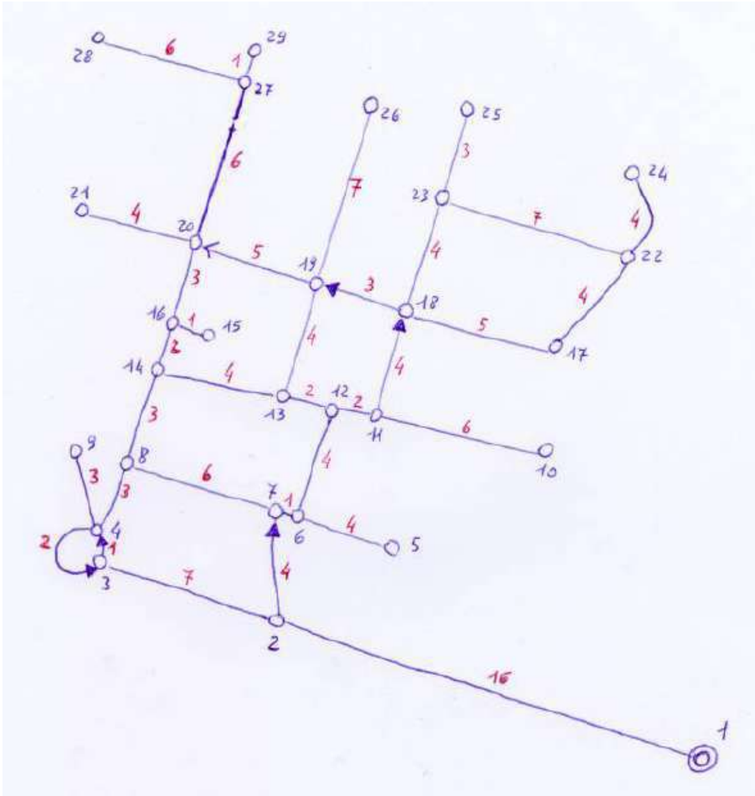


Figura 4. Il grafo stradale del quartiere Martinetta.

Il problema da affrontare è dunque il seguente: trovare il percorso che consente al postino di attraversare tutti i 34 archi del grafo, partendo dal nodo 1 e tornando al nodo 1. Sarebbe utile non dover percorrere nessun arco più di una volta!

Analizziamo allora il problema un po' più da vicino. Possiamo osservare che alcuni archi del grafo terminano in un nodo da cui non si possono raggiungere altri archi. In questi casi, il postino deve quindi tornare sui suoi passi, percorrendo necessariamente questi archi prima in una direzione e poi nell'altra. Ad esempio, dovrà andare dal nodo 22 al 24 e poi dal 24 non potrà fare altro che tornare al 22. Quindi l'arco 22-24 sarà percorso due volte. Possiamo identificare facilmente tutti questi casi: corrispondono ai nodi che hanno grado uguale a 1.

In Figura 5 riportiamo il grafo dopo aver raddoppiato gli archi che sicuramente devono essere percorsi due volte. Questi archi sono rappresentati in verde. Naturalmente il costo degli archi verdi è pari al costo degli archi blu corrispondenti: il costo di questi archi deve essere conteggiato due volte, dato che gli archi verranno percorsi due volte.

Dopo questa modifica, nel grafo non ci sono più nodi di grado uguale a 1 e possiamo porci di nuovo la domanda: è possibile percorrere tutti gli archi del grafo una volta sola, partendo dal nodo 1 e tornando al nodo 1?

Questa domanda equivale, come ormai ben sappiamo, a chiedersi se il grafo in Figura 5 è euleriano o meno, e sappiamo anche come fare a stabilirlo: basta osservare il grado di tutti i suoi nodi.

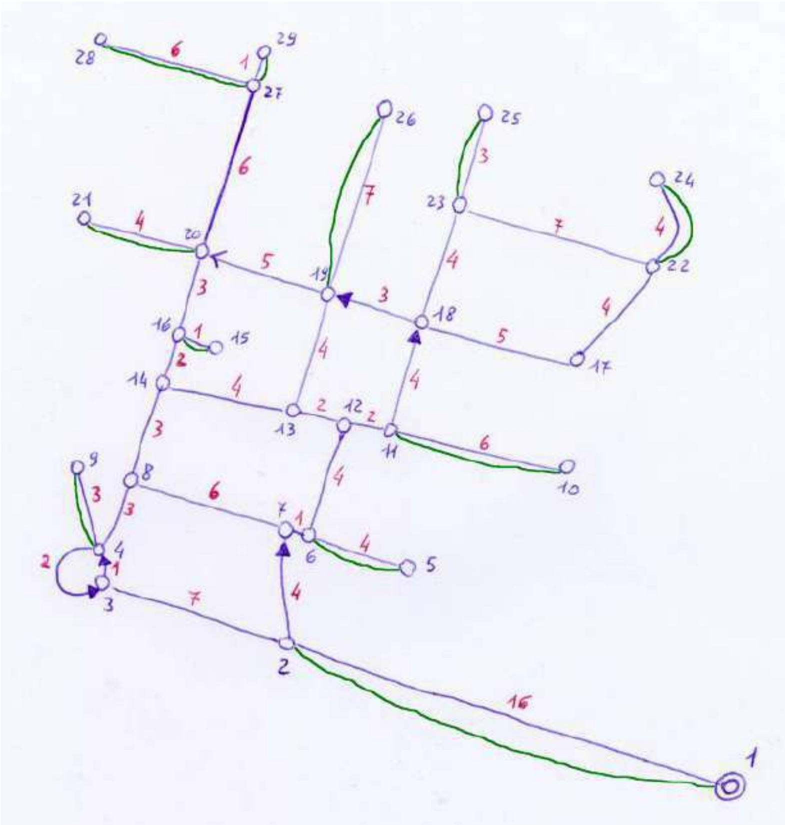


Figura 5. Il grafo stradale con gli archi percorsi necessariamente due volte.

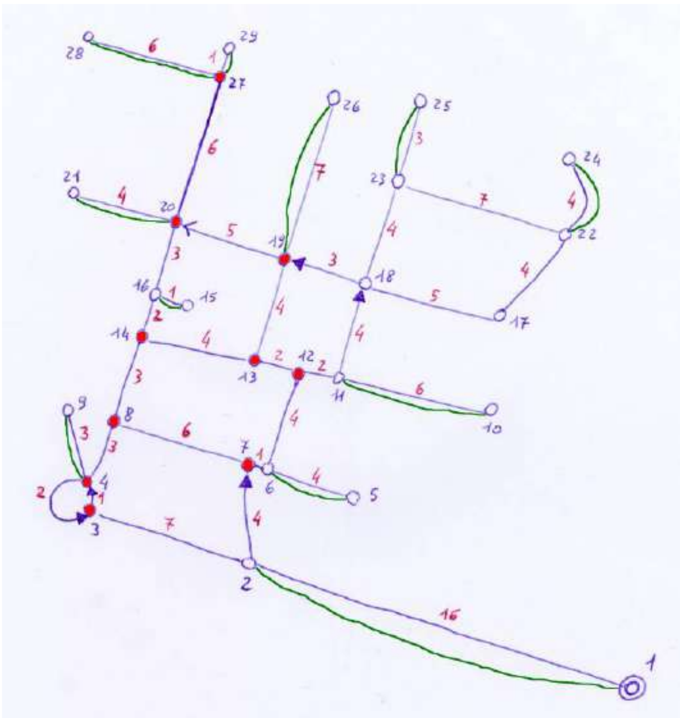


Figura 6. I nodi di grado dispari nel grafo del quartiere Martinetta, evidenziati in rosso.

L'analisi del grafo rivela la presenza di ben 10 nodi di grado dispari. Sono quelli evidenziati in rosso nella Figura 6. Quindi non esiste un ciclo euleriano su questo grafo.

Questo fatto però non esaurisce il problema, anzi a questo punto viene la parte forse più interessante, da un punto di vista applicativo. Infatti, alla luce di quanto visto prima, possiamo dire che, se aggiungessimo archi al grafo (pagando i corrispondenti costi), potremmo renderlo

euleriano. Gli archi da aggiungere corrisponderanno ad ulteriori "passate" lungo le vie del quartiere, come gli archi verdi che abbiamo già aggiunto. Quanti archi dobbiamo aggiungere?
Vediamo: dobbiamo far diventare pari il grado di tutti quei nodi che attualmente hanno grado dispari. Ogni volta che aggiungiamo al grafo un arco, aumentiamo di 1 il grado di entrambi i suoi estremi. Se dunque sono 10 i nodi il cui grado deve diventare pari, possiamo sperare di raggiungere il nostro scopo aggiungendo 5 archi, che uniscano coppie di questi nodi e che non abbiano estremi in comune. Nel nostro grafo esistono 5 archi con questa proprietà?
No, non esistono. Dobbiamo generalizzare leggermente la nostra richiesta. Per aumentare di 1 il grado di una coppia nodi non è strettamente necessario inserire un arco che li collega direttamente: si può ottenere lo stesso effetto usando un cammino, che li collega indirettamente. Aggiungendo un cammino che collega i due nodi, il grado di ogni nodo intermedio di un cammino aumenta di 2 e quindi non cambia parità: se è pari resta pari, se è dispari resta dispari. Il grado degli estremi del cammino invece aumenta di 1, come desiderato. Cerchiamo allora non 5 archi, ma 5 cammini, che abbiano come estremi i 10 nodi di grado dispari.
Stavolta scopriamo che ci sono tante soluzioni possibili. Come trovare la migliore, cioè quella di costo minimo? Si tratta, evidentemente, di affrontare e risolvere un problema di ottimizzazione. Noi affronteremo questo problema costruendone il modello matematico, ossia definendone i quattro componenti fondamentali: i dati, le variabili, i vincoli e l'obiettivo, e useremo il linguaggio matematico per definirli.
Dati. I dati di un problema rappresentano "ciò che si sa", cioè tutti gli elementi, rilevanti per il problema in esame, che hanno un valore noto. Nel nostro caso, abbiamo un grafo sul quale abbiamo individuato dieci nodi da connettere a due a due, e ci serve conoscere i costi di ogni connessione. Poiché i nodi sono dieci, quante sono le connessioni possibili? Sono tutte quelle da ogni nodo ad ogni altro (quindi 10 x 10), tranne che tra un nodo a sé stesso, quindi 10x10 – 10 = 90. Qual è il costo di connessione da un generico nodo A ad un generico nodo B? È la lunghezza del *cammino minimo* da A a B. Dato che il nostro esempio è molto semplice, possiamo agevolmente calcolare queste lunghezze guardando direttamente il grafo, ma è importante sapere che, per grafi più grandi, si possono usare procedimenti automatici (algoritmi) per realizzare questo compito. Per esempio, il cammino minimo dal nodo 3 al nodo 7 è dato dalla sequenza 3-4-8-7 e ha lunghezza complessiva pari a 10. Siccome consideriamo il grafo simmetrico, trascurando i sensi unici, ci basta calcolare la metà dei valori, perché la lunghezza del cammino minimo da A a B è uguale alla lunghezza del cammino minimo da B ad A.
Una volta trovati tutti i cammini minimi che ci servono (sono quindi 45) ne memorizziamo le lunghezze in una matrice, cioè in una tabella con tante righe e tante colonne quanti i nodi di grado dispari (Figura 7). Per la simmetria dei cammini, ci basta metà della matrice: l'altra metà sarebbe uguale. Poiché non ammettiamo cammini da un nodo a sé stesso, non ci servono neanche gli elementi sulla diagonale principale della matrice.

$d(i,j)$	3	4	7	8	12	13	14	19	20	27
3		1	10	4	13	11	7	15	12	18
4			9	3	12	10	6	14	11	17
7				6	5	7	9	9	14	20
8					9	7	3	11	8	14
12						2	6	6	11	17
13							4	4	9	15
14								8	5	11
19									5	11
20										6
27										

Figura 7. La lunghezza del cammino minimo da ogni nodo ad ogni altro,

per tutte le coppie di nodi di grado dispari.
In linguaggio matematico, definiamo l'insieme N dei nodi di grado dispari, cioè $N = \{3, 4, 7, 8, 12, 13, 14, 19, 20, 27\}$ e indichiamo con $l(i,j)$ la lunghezza del cammino minimo dal generico nodo i al generico nodo j, con $i < j$. Ad esempio $d(3,4) = 1$ e $d(20,27) = 6$.

Variabili. Le variabili del problema rappresentano le decisioni che vanno prese, e dunque sono grandezze che non hanno un valore dato, ma un valore che dobbiamo scegliere noi, e il modello matematico serve appunto a guidarci nella scelta della decisione migliore. Nel nostro caso, per ogni coppia di nodi dell'insieme N, dobbiamo decidere se inserire nel grafo una connessione tra questi due nodi oppure no. Questo fatto lo possiamo rappresentare introducendo variabili binarie, ossia che possono assumere solo due valori, corrispondenti a "sì" e "no". Convenzionalmente useremo a questo scopo i valori 0 per indicare "no" (connessione non scelta) e 1 per indicare "sì" (connessione scelta), ossia rappresenteremo con $x(i,j)=1$ la decisione di aggiungere al grafo un cammino tra i nodi i e j, mentre se $x(i,j)=0$ non viene aggiunto tale cammino. Si noti che le variabili sono tante quante le connessioni possibili (ossia, 45). Ad esempio, la tabella in Figura 8 specifica un possibile insieme di connessioni.
In tale soluzione, si ha $x(3,4) = x(7,12) = x(8,14) = x(13,19) = x(20,27) = 1$ mentre tutte le altre variabili hanno valore $x(i,j) = 0$. Tale soluzione corrisponde dunque a connettere le coppie di nodi 3-4, 7-12, 8-14, 13-19, 20-27.
Vincoli. I vincoli rappresentano invece "ciò che si può o non si può fare"; sono cioè condizioni che devono essere rispettate dalle variabili di decisione affinché una soluzione (rappresentata dai valori delle variabili di decisione) sia ammissibile. Infatti, non possiamo porre a 1 un qualsiasi insieme di variabili affinché questi valori rappresentino una soluzione accettabile del nostro problema. In particolare, ogni nodo di grado dispari deve essere connesso con esattamente un altro nodo di grado dispari. Questa condizione si traduce nel richiedere che per ogni nodo di grado dispari, il numero di variabili poste a 1 sulla sua riga e sulla sua colonna sia complessivamente pari a 1.

$x(i,j)$	3	4	7	8	12	13	14	19	20	27
3		1	0	0	0	0	0	0	0	0
4			0	0	0	0	0	0	0	0
7				0	1	0	0	0	0	0
8					0	0	1	0	0	0
12						0	0	0	0	0
13							0	1	0	0
14								0	0	0
19									0	0
20										1
27										

Figura 8. Una soluzione espressa attraverso le variabili del problema.

Esprimiamo anche questa condizione in linguaggio matematico. Consideriamo ad esempio il nodo 12 (corrispondente alla quinta riga e quinta colonna della matrice). Essendo le variabili binarie, la condizione suddetta equivale a imporre:

$$x(3,12) + x(4,12) + x(7,12) + x(8,12) + x(12,13) + x(12,14) + x(12,19) + x(12,20) + x(12,27) = 1$$

e così analogamente per tutti gli altri nodi. Dovremo quindi scrivere, complessivamente, dieci equazioni lineari come questa.

Obiettivo. L'obiettivo rappresenta "ciò che si desidera". In questo caso vogliamo minimizzare i costi complessivi dei cammini scelti. Tali costi sono dati dalla somma delle distanze d(i,j) corrispondenti alle posizioni (i,j) della matrice in cui abbiamo deciso di porre $x(i,j) = 1$.
In linguaggio matematico possiamo quindi indicare con z la lunghezza complessiva dei cammini scelti, ossia la *funzione obiettivo*, e definirla come:

$$\begin{aligned} z = {} & d(3,4)\,x(3,4) + \ldots + d(3,27)\,x(3,27) + \\ & + d(4,7)\,x(4,7) + \ldots + d(4,27)\,x(4,27) + \\ & + \ldots + \\ & + d(20,27)\,x(20,27) \end{aligned}$$

e in definitiva il problema consiste nel cercare, tra gli insiemi di variabili che soddisfano i vincoli, quello che rende minima la funzione obiettivo.
Risoluzione. Adesso che il problema di ottimizzazione è stato formulato tramite un opportuno modello matematico, può essere risolto con un opportuno algoritmo, ossia un procedimento di calcolo, che potrà essere eseguito a mano oppure lo si può far eseguire ad un calcolatore. Nel caso in esame il problema non è banale da risolvere a mano, mentre è abbastanza immediato da risolvere utilizzando un foglio elettronico su calcolatore. Si tratta di codificare nel linguaggio del foglio elettronico il modello matematico di cui sopra, e dare quindi il comando di determinare la soluzione ottima. A quel punto il programma determina i valori ottimi delle variabili, a cui corrisponderà l'insieme delle connessioni che ottimizzano la distanza che il postino dovrà percorrere.
Nel nostro esempio, la soluzione ottima è proprio quella indicata nella tabella di Figura 8. Il suo costo è pari a 19. Possiamo riportare la soluzione sul nostro grafo, come indicato in Figura 9, dove i cammini che abbiamo scelto sono indicati in rosso. Il grafo che abbiamo ottenuto ha finalmente tutti i nodi di grado pari: è un grafo euleriano. Il postino può quindi percorrere ogni suo arco esattamente una volta, tornando al punto di partenza.
Il costo totale della soluzione così ottenuta è dato dal costo di tutti i 34 archi del quartiere (disegnati in blu), più il costo di tutti gli archi che abbiamo dovuto raddoppiare a causa dei nodi di grado 1 (disegnati in verde), più il costo di tutti i cammini che abbiamo dovuto aggiungere per rendere euleriano il grafo (disegnati in rosso). In totale: 141 + 53 + 19 = 213.

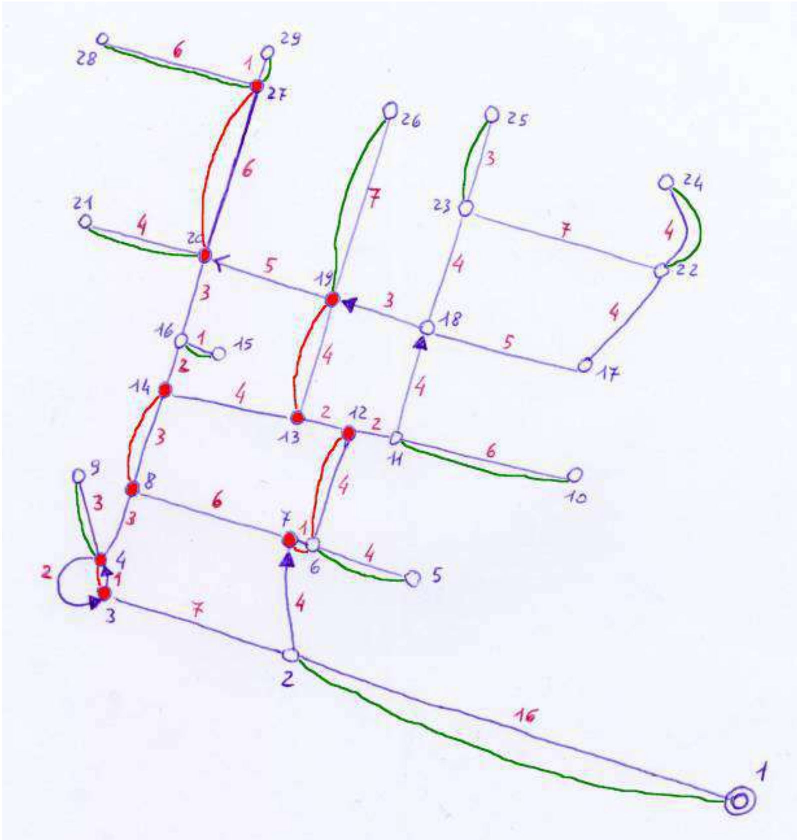


Figura 9. La soluzione ottima: il grafo euleriano di costo minimo.

Resta un ultimo (facile) problema da risolvere: una volta reso il grafo euleriano, come possiamo trovare il ciclo euleriano su questo grafo euleriano? Ossia, quale sequenza di strade deve percorrere il postino?
Anche per risolvere questo problema esiste un algoritmo, stavolta abbastanza semplice da poter essere eseguito manualmente. Si inizializza il nodo corrente al nodo 1 e iterativamente si sceglie un arco incidente al nodo corrente per raggiungere un nuovo nodo corrente. Ogni volta che si percorre un arco lo si cancella. Attenzione però: ogni volta che si deve decidere quale arco percorrere bisogna controllare che, cancellandolo, il grafo rimanga connesso, a parte i nodi di grado 0.
Ad esempio, dopo aver percorso gli archi 1-2, 2-7 e 7-8 si ha la scelta tra 8-4 e 8-14 (Figura 10).

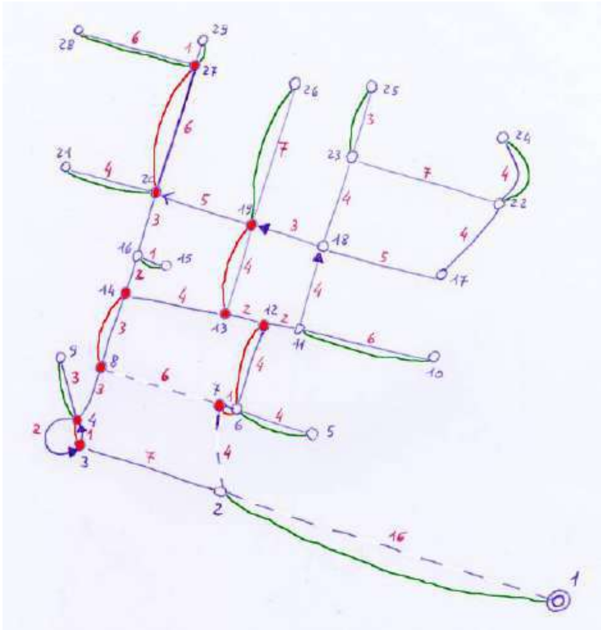


Figura 10. Costruzione del ciclo euleriano sul grafo.

Se si proseguisse ora percorrendo e cancellando l'arco 8-4, il grafo risulterebbe disconnesso in due componenti: i nodi 1, 2, 3, 4 e 9 da una parte e tutti gli altri nodi dall'altra. Questa scelta è quindi proibita: bisogna proseguire percorrendo (e cancellando) l'arco 8-14. E così via. In definitiva si ottiene il ciclo euleriano (1, 2, 7, 8, 14, 16, 15, 16, 20, 21, 20, 27, 28, 27, 29, 27, 2, 19, 26, 19, 18, 23, 25, 23, 22, 24, 22, 17, 18, 11, 10, 11, 12, 6, 5, 6, 7, 6, 12, 13, 19, 13, 14, 8, 4, 9, 4, 3, 4, 3, 2, 1).

Al di là dell'applicazione, si può notare che ovviamente il problema di rendere euleriano un grafo al costo minimo si può porre per qualsiasi grafo, e infatti questo problema è noto come *problema del postino cinese* (*Chinese postman problem*) – nome scelto dal matematico americano Jack Edmonds in onore del matematico cinese Meigu Guan, che per primo formulò il problema nel 1962 [2]. Peraltro, una generalizzazione di questo problema si ha supponendo che percorrere uno stesso arco possa avere un costo diverso a seconda del verso di percorrenza: tale variante, chiamata *Windy postman problem*, fu dimostrata essere un problema molto più difficile del precedente, proprio da Guan [3].

Cicli hamiltoniani e commessi viaggiatori

Un concetto di teoria dei grafi che si presta a fare interessanti considerazioni (e che ha incontrato un enorme interesse da parte di scienziati di varie discipline) è il concetto di *ciclo hamiltoniano*. Nel 1857, il celebre matematico irlandese William Rowan Hamilton, nell'ambito dei suoi studi sulla simmetria, fu incuriosito dal seguente problema. Considerando un dodecaedro, solido avente dodici facce e venti vertici (e quindi, trenta spigoli), Hamilton si pose il problema di capire se fosse possibile partire da un vertice e, muovendosi lungo gli spigoli, percorrere tutti i vertici esattamente una volta, tornando al vertice di partenza.

Siccome può essere poco pratico costruirsi un dodecaedro per studiare il problema, possiamo pensare, equivalentemente, di rappresentarlo in due dimensioni, "aprendo" una delle dodici facce e "schiacciando" il reticolo che costituisce il dodecaedro su un piano, conservando ovviamente le relazioni di adiacenza di vertici e spigoli. Così facendo si ottiene una rappresentazione del dodecaedro attraverso un grafo planare (cioè appunto, rappresentabile su un piano), come quella riportata in Figura 11.

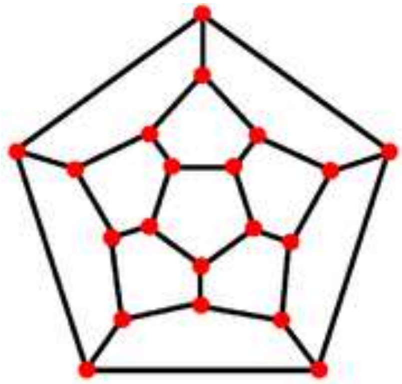


Figura 11. Rappresentazione planare di un dodecaedro.

Il quesito suscitò subito un estremo interesse, anche al di fuori della ristretta comunità dei matematici, tanto che fu addirittura prodotto e commercializzato un rompicapo con cui ciascuno poteva cercare di trovare il cammino – o meglio, il ciclo, dal momento che punto di inizio e di fine coincidono – che consente di visitare tutti i nodi del grafo (ossia, i vertici del dodecaedro) senza mai passare due volte per lo stesso nodo. A questo rompicapo fu dato anche un nome suggestivo, *The Icosian Game*, a causa del fatto che i nodi sono appunto venti, e dunque altrettanti gli archi che devono essere percorsi. (In realtà il gioco consisteva nel fatto che un giocatore poteva selezionare un certo numero di nodi, e l'altro doveva cercare un ciclo hamiltoniano sui rimanenti. Stando a quanto riportato su [5], si conoscono oggi solo 4 esemplari originali di questo gioco.)
La risposta al quesito di Hamilton sul dodecaedro è affermativa, ossia esiste un ciclo del tipo richiesto (vedi Figura 12).

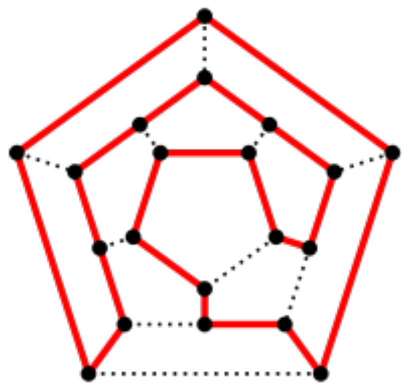


Figura 12. Ciclo hamiltoniano sui vertici di un dodecaedro.

Il fatto che il quesito originario di Hamilton avesse risposta affermativa non determinò una diminuzione nell'interesse nei confronti del problema, in quanto apparve chiaro come lo stesso quesito poteva porsi per qualsiasi grafo. Siccome il problema di determinare se esiste o meno un ciclo che passa esattamente una volta per ogni arco, come abbiamo visto, è di facile soluzione, venne abbastanza naturale chiedersi se in modo altrettanto semplice si potesse caratterizzare l'esistenza di un ciclo che passi esattamente una volta per ogni nodo, e che, in onore del suo inventore, viene chiamato *ciclo hamiltoniano*. L'analisi di questo problema ha dato luogo a una letteratura scientifica estremamente ricca e, soprattutto, alla possibilità di risolvere problemi applicativi, fatto a cui presumibilmente Hamilton non aveva pensato (ammesso che la cosa potesse interessargli).
Il problema del ciclo hamiltoniano è un ottimo pretesto per avvicinare a problemi matematici complessi e profondi anche persone che non hanno (ancora) una cultura matematica particolarmente ampia, come ad esempio gli studenti delle scuole medie. In cosa consiste il problema, lo capisce chiunque. Una volta mostrata la soluzione, anche questa può essere

compresa – e sperimentata – da chiunque: data la sequenza dei nodi che costituiscono il ciclo hamiltoniano, posso ripercorrerla verificando che in effetti ogni volta posso spostarmi da un nodo al successivo attraverso uno degli archi del grafo.
Dunque, è possibile per chiunque, dato un grafo, "provare" in maniera più o meno empirica a trovare un ciclo hamiltoniano. Evidentemente, se la ricerca riesce, il problema è risolto, ma se invece non riusciamo a trovarlo non sappiamo se è particolarmente nascosto o se non esiste proprio. Ma c'è un modo sistematico e semplice di risolvere il problema (come c'è per stabilire se un grafo è euleriano, per intenderci), ossia che consenta, dato un grafo qualsiasi, di trovare un ciclo hamiltoniano, o di concludere che esso non esiste?
A questo punto dovremmo essere un po' più precisi su cosa intendiamo per "semplice", cosa che esula dallo scopo di queste brevi note. Se comunque, informalmente, pensiamo a un algoritmo che possa agevolmente essere applicato da un essere umano e che consente in poco tempo di giungere alla soluzione del problema, allora la risposta è NO.
C'è almeno una cosa che hanno in comune il problema di determinare se esiste un ciclo euleriano e il problema di determinare se esiste un ciclo hamiltoniano: ambedue sono esempi di quelli che soprattutto in ambito informatico si chiamano *problemi di decisione*, ossia problemi la cui risposta consiste in "sì" o "no". Negli anni '70 del secolo scorso si è sviluppata una profonda teoria della complessità computazionale che ha portato alla possibilità di classificare i problemi di decisione in varie categorie a seconda della loro difficoltà. Il problema del ciclo euleriano è un problema facile. Il problema del ciclo hamiltoniano – è stato uno dei primi risultati di questa teoria – è purtroppo un problema che ricade nella categoria dei problemi difficili ("NP-completi"), ossia è estremamente improbabile che si scopra mai un algoritmo risolutivo in grado di risolverlo in modo efficiente su qualsiasi grafo. Ciò non vuol dire che all'atto pratico il problema del ciclo hamiltoniano non si riesca a risolvere, ma ciò è possibile solo attraverso algoritmi complessi, tipicamente molto sofisticati e comunque in un tempo di calcolo che (indipendentemente dal computer su cui è programmato) crescono molto rapidamente al crescere delle dimensioni del grafo.
Alla luce di questo fatto, può sembrare frustrante l'idea di proporre a studenti di liceo di cimentarsi in un problema difficile come quello del ciclo hamiltoniano. Tuttavia, anche in questa notevole difficoltà sta uno degli aspetti formativi: nonostante l'apparente analogia tra i due concetti (ciclo euleriano e ciclo hamiltoniano), si scopre che la difficoltà di riconoscere l'esistenza di una delle due strutture è molto maggiore dell'altra. L'ottimizzazione combinatoria è piena di esempi analoghi. Ad esempio, si è fatto prima cenno al problema di trovare il cammino minimo tra due nodi di un grafo: tale problema ricade nella categoria dei problemi facili, ed è agevolmente risolvibile in poco tempo su qualsiasi computer utilizzando algoritmi specifici, anche con grafi con milioni di nodi (a parte i limiti eventualmente posti dalla memoria del computer). Ma se invece vogliamo cercare il cammino massimo, ecco che la situazione si complica notevolmente: infatti, cercare il cammino massimo è in generale un problema difficile, nonostante l'apparente analogia tra i due problemi...
Tra i motivi per cui i cicli hamiltoniani sono ancora estremamente studiati è perché, come si accennava all'inizio, essi si incontrano in un gran numero di problemi di carattere organizzativo/logistico, anche molto diversi tra loro. Negli anni '30 del secolo scorso, grazie a matematici come Menger, nasce la formulazione esatta di un problema che è una diretta generalizzazione del problema del ciclo hamiltoniano. La storia usata per introdurre il problema è la seguente. Un commesso viaggiatore, che abita in una città 0, deve visitare n città, e per ogni coppia di città è data una distanza chilometrica. Il problema consiste nel decidere in quale ordine il commesso deve visitare le n città e tornare alla città 0, in modo da percorrere la più breve distanza possibile complessiva. Questo problema è noto come problema del commesso viaggiatore, ovvero TSP (in origine *Traveling Salesman Problem* e oggi più comunemente chiamato *Traveling Salesperson Problem* per essere politically correct).

Si noti la similitudine con il problema del ciclo hamiltoniano. In altri termini, il commesso viaggiatore deve percorrere un ciclo hamiltoniano, ma stavolta il problema non è trovarne uno, in quanto evidentemente qualunque sequenza delle n città costituisce un percorso ammissibile: il problema è scegliere il ciclo hamiltoniano che fa percorrere meno strada, e questo fatto rende il problema niente affatto banale. Di nuovo, cosa va ricercato (un ciclo hamiltoniano) è chiaro, l'obiettivo (minimizzare la distanza) pure, ma come fare a trovare la soluzione non è affatto semplice, e infatti siamo nuovamente, in generale, di fronte a un problema difficile.
Va però detto che, pur essendo in generale un problema difficile, il problema del commesso viaggiatore presenta delle proprietà che possono consentire di trovare, con relativamente poco sforzo, se non una soluzione ottima, almeno una soluzione "buona", intendendo con questo termine una soluzione che non dista troppo dall'ottimo in termini percentuali. Sono oggi disponibili strumenti software con interfacce che consentono in modo molto semplice di "provare" soluzioni e che possono quindi prestarsi a studiare proprietà del problema. In particolare, esiste un prodotto per tablet che, dato un insieme di punti sul piano, consente di tracciare con le dita un possibile ciclo hamiltoniano, in cui la distanza tra due punti è quella euclidea (TSP euclideo): una volta proposto un ciclo, il programma fornisce la soluzione ottima e indica quindi di quanto la soluzione proposta fosse eventualmente lontana dall'ottimo. Una proprietà molto semplice e che può semplificare la ricerca dell'ottimo è che nel ciclo hamiltoniano ottimo non possono esserci "incroci": infatti, è facile mostrare che se così fosse, eliminando tali incroci (se gli archi (i,j) e (h,k) si incrociano, sostituirli con (i,h) e (j,k)), la distanza complessiva può soltanto diminuire. Una proprietà invece meno intuitiva è la seguente: se il commesso viaggiatore a un certo punto si trova su una città i, potrebbe essere tentato/a di pensare che la cosa migliore sia quella di recarsi alla città non ancora visitata più vicina. Applicare questa regola apparentemente sensata invece può portare a soluzioni anche molto lontane dall'ottimo… di nuovo, l'ottimizzazione combinatoria fornisce esempi di come idee "ragionevoli", che in molti casi possono dare luogo anche a soluzioni accettabili, non possono essere usate per risolvere il problema esattamente in tutti i casi: solo un rigoroso approccio matematico può garantire la correttezza di una proprietà o di un algoritmo, indipendentemente da quanto ci suggerisce l'intuizione….
Se si trattasse solo di risolvere enigmi matematici, l'interesse nei confronti del TSP sarebbe limitato: in realtà, il motivo per cui esiste una letteratura sterminata sugli algoritmi risolutivi per questo problema (che oggi consentono di risolvere problemi con milioni di città, a patto di avere a disposizione una potenza di calcolo considerevole), è anche legato alle sue ricadute applicative, soprattutto nella produzione e nella logistica. Ad esempio, nell'industria elettronica, vengono prodotti una quantità enorme di circuiti stampati, ossia schede sulle quali vengono inseriti componenti elettronici [1]. Per inserire tali componenti occorre praticare dei fori (talora varie centinaia su una sola scheda), secondo schemi elaborati dai progettisti. I fori vengono creati da un trapano che, muovendosi parallelamente alla scheda, si sofferma in corrispondenza dei punti in cui deve essere effettuato un foro. Chiaramente il tempo necessario a produrre ciascuna scheda dipende dalla distanza in totale percorsa dalla testa perforante, che si vorrà dunque minimizzare. Un risparmio anche di pochi secondi per ogni scheda può significare diverse ore-macchina in meno. Molti altri esempi di applicazioni del problema del TSP sono riportati in [6].

Concludendo…

Il celebre matematico Hardy, nella sua apologia della matematica, sosteneva con un certo vigore la tesi che il valore della matematica sta nella sua bellezza e non nella sua utilità nel risolvere problemi reali [4]. Al di là del fatto che si condivida o meno la sua opinione, e ovviamente in tutta modestia, riteniamo utile, per avvicinare molte persone al pensiero matematico, far riferimento a problemi che si riescono a "visualizzare" facilmente, e in questo senso la teoria dei grafi fornisce molti esempi significativi, come quelli visti in questo articolo. Per quanto semplificati, gli esempi presentati mostrano come, in alcuni casi, la teoria possa essere messa al servizio della soluzione di problemi decisionali reali. Al di là di questo, riteniamo comunque che molti concetti di teoria dei grafi siano intrinsecamente affascinanti, per la loro eleganza e anche per la talvolta insospettabile complessità che nascondono. Inoltre, per molti è talvolta una scoperta il fatto che anche problemi apparentemente lontani dalla matematica classica possano essere affrontati e risolti facendo uso della logica e del rigore propri della matematica.

Riferimenti bibliografici

[1] ALKAYA A.F., DUMAN, E., 2013, Application of sequence-dependent traveling salesman problem in printed circuit board assembly, 'IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology' 3(6), 1063-1076

[2] GRÖTSCHEL, MARTIN; YUAN, YA-XIANG, 2012, Euler, Mei-Ko Kwan, Königsberg, and a Chinese postman, Optimization stories: 21st International Symposium on Mathematical Programming, Berlin, August 19–24, 2012, 'Documenta Mathematica'.

[3] GUAN, M., 1984, On the windy postman problem, 'Discrete Applied Mathematics', 9 (1): pp. 41–46.

[4] HARDY, G. H., 1940, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press.

[5] https://www.puzzlemuseum.com/, sito della collezione di giochi e rompicapi Hordern-Dalgety

[6] LAWLER, E. L., LENSTRA, J.K., RINNOOY KAN, A. H. G., SHMOYS, D. B., 1985, The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization, Wiley.

LA CO-DISCIPLINARITÀ TRA MATEMATICA E... NELLA SCUOLA SECONDARIA: UN'ARMA PER COMBATTERE LA DISPERSIONE SCOLASTICA

Michele G. FIORENTINO[1], Antonella MONTONE[1], Giuditta RICCIARDIELLO[1]

[1] *Università degli Studi di Bari Aldo Moro, Bari (BA)*

Riassunto

Il problema della dispersione scolastica è un problema che coinvolge molti aspetti, sia sociali che culturali che economici, ma anche l'aspetto della didattica negli Istituti Professionali, che sono gli istituti a più alto tasso di dispersione scolastica. In particolare, il ruolo della Didattica della Matematica influenza ulteriormente questo problema. Analizzeremo alcuni dettagli che ci porteranno a riflettere su come la matematica, affrontata in sinergia con le discipline professionali, possa essere un fattore che favorisce la riduzione di tale fenomeno.

Introduzione

Dati recenti relativi alla dispersione scolastica, fanno emergere una situazione nazionale molto allarmante, evidenziando come tale fenomeno sia sempre più in aumento e molto diffuso negli Istituti Professionali. Tuttavia, si tratta di un fenomeno non solo italiano, ma con caratteristiche diverse anche in Europa. Riteniamo che oltre a motivazioni di natura socio-culturale ed economica, vi siano delle problematiche legate alle metodologie didattiche disciplinari utilizzate in tali istituti. Infatti, risulta sempre più una netta separazione tra le discipline professionali e la Matematica nei contenuti e nella metodologia.

In questo articolo, si pone l'attenzione verso una modalità di lavoro co-disciplinare (Blanchard Laville, 2001) attraverso la metodologia della Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) per "combattere" la dispersione scolastica. Si propongono infatti degli itinerari didattici co-disciplinari, con l'obiettivo da un lato di favorire l'apprendimento di alcuni concetti matematici, calati nel mondo delle discipline professionali e, dall'altro, di rendere gli studenti di un istituto professionale sempre più consapevoli del ruolo della matematica, anche in contesti prettamente professionali.

I numeri

Ci sembra opportuno condividere i dati sul fenomeno della dispersione, la cui drammaticità, nel nostro Paese e in particolare negli Istituti Professionali, appare evidente analizzando alcuni dati ufficiali, prodotti dalle ultime rilevazioni nazionali e internazionali.

Un indicatore molto diffuso e riconosciuto a livello internazionale per "misurare" la dispersione scolastica è l'*abbandono scolastico precoce*, che rappresenta la percentuale di giovani tra i 18 e i 24 anni che hanno completato al massimo la scuola dell'obbligo e che non sono coinvolti in percorsi formativi di livello superiore nelle quattro settimane precedenti l'indagine. Questo dato, in Italia, rappresenta soprattutto i giovani che nella migliore delle ipotesi hanno terminato la scuola secondaria di primo grado e che non frequentano – o hanno smesso di frequentare – le scuole secondarie di secondo grado. Tale indicatore è un benchmark della Strategia "Europa 2020", nella quale è previsto un target fissato al 10%, poi ridotto al 9% da raggiungere entro il 2030.

Nella relazione di monitoraggio del settore dell'istruzione e della formazione per il 2021 della Commissione Europea (Figura 1), si evidenzia che il tasso di abbandono scolastico in Italia nel 2020 è del 13%. Tale dato, seppur in calo rispetto alla percentuale del 18,6% del 2010, risulta comunque molto alto rispetto alla media dei Paesi UE (9,9%).

Figura 1 - Panoramica degli indicatori chiave

			Italia		EU-27	
			2010	2020	2010	2020
Traguardi a livello di UE		**Traguardo 2030**				
Partecipazione all'educazione della prima infanzia (dai 3 anni all'età di inizio dell'instruzione primaria obbligatoria		≥ 96%	97,3%[13]	93,6%[19,e]	91,8%[13,d]	92,8%[19]
Discenti all'otavo anno della scuolla dell'obbligo con scarsi risultati in termini di competenze digitali		< 15%	:	:	:	:
Quindicenni con scarsi risultati in:	Lettura	< 15%	21,0%[09, b]	23,3%[18,b]	19,7%[09, b]	22,5%[18,b]
	Matematica	< 15%	25,0%[09]	23,8%[18]	22,7%[09]	22,9%[18]
	Scienze	< 15%	20,6%[09]	25,9%[18]	17,8%[09]	22,3%[18]
Abbandono precoce dell'istruzione e della formazione (18-24 anni)		< 9%	18,6%	13,1%	13,8%	9,9%
Esposizione dei diplomati dell'IFP all'apprendimento basato sul lavoro		≥ 60%	:	:	:	:
Completamento dell'istruzione terziaria (25-34 anni)		≥ 45% (2025)	20,8%	28,9%	32,2%	40,5%

Figura 1 – Dati relazione di monitoraggio del settore dell'istruzione e della formazione per il 2021.

In più, sul territorio nazionale, i dati dell'ultima rilevazione statistica relativa all'abbandono complessivo per indirizzo di studio relativo alla scuola secondaria di secondo grado negli aa. ss. 2018/2019 e 2019/2020, manifestano come l'abbandono scolastico sia molto più accentuato negli Istituti Professionali, rispetto ad Istituti Tecnici e Licei (Figura 2).

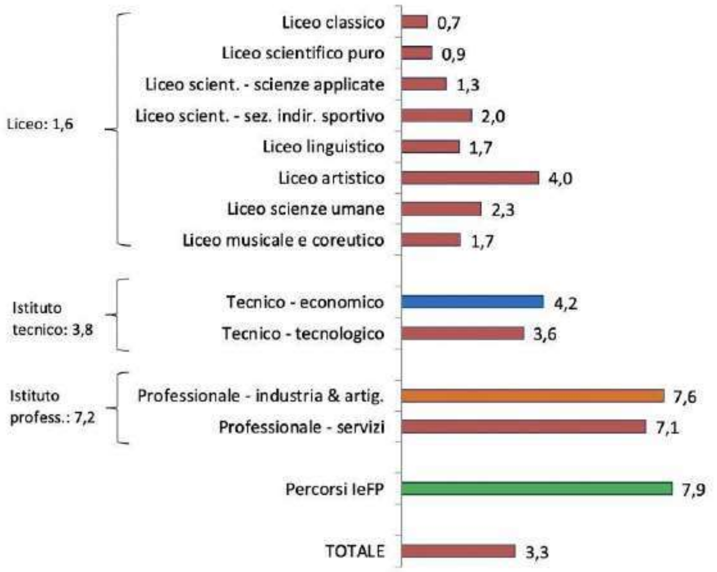


Figura 2 – Abbandono complessivo per indirizzo di studio relativo alla scuola secondaria di secondo grado negli aa. ss. 2018/2019 e 2019/2020. Fonte: MI – DGSIS – Ufficio Gestione Patrimoni Informativo e Statistica - ANS

In aggiunta, nella nostra realtà territoriale risultano assenti tutte le figure intermedie professionali, , contro una richiesta sempre più pressante da parte del territorio di tali figure.

La problematica relativa alla dispersione scolastica, non è solo italiana, ma riguarda tutta la comunità europea. Attualmente, il dibattito europeo mette in luce alcune lacune nella crescita economica, che appaiono sempre più legate proprio all'abbandono scolastico.

Un fenomeno strettamente connesso all'abbandono scolastico e che permette di avere un quadro più generale sulla situazione giovanile a livello europeo, è quello dell'incidenza dei cittadini "Not in Education, Employment or Training", detti NEET, sul territorio. I NEET sono "le persone di età compresa tra i 15 e i 24 anni (ma in Italia tale accezione è estesa ai giovani fino a 29 anni) che non lavorano (sono, quindi, disoccupati o inattivi) e che non frequentano corsi formali d'istruzione o di formazione". Tale definizione segue le indicazioni dell'ufficio statistico Eurostat e si differenzia dalla definizione dell'OCSE per la quale i NEET comprendono i giovani che non lavorano e non studiano, anche se sono impegnati in corsi o attività d'istruzione e di formazione non formali e informali. Analizzando la distribuzione dei NEET in Europa, si evidenzia, tuttavia, come questo valore sia elevato dappertutto, ma soprattutto in Italia (Figura 3).

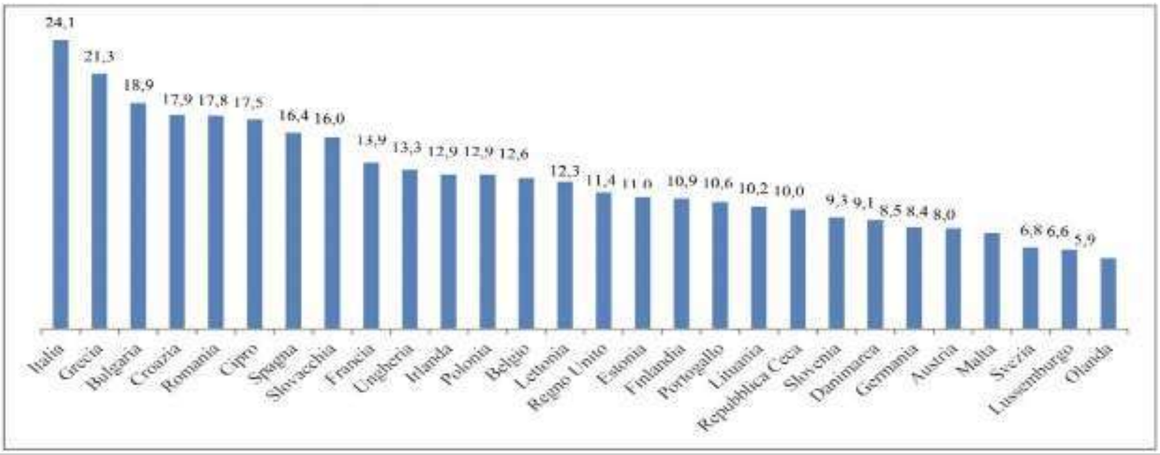


Figura 3 – Distribuzione di NEET (15-29 anni) nei paesi UE28, anno 2017 (val. %)

Le cause dell'abbandono scolastico

Dai report statistici e dalla letteratura nel settore, è emerso che l'abbandono scolastico è strettamente correlato alle fasce di reddito, alle aree geografiche, ai livelli di istruzione e alla situazione occupazionale dei capifamiglia (EU SILC, "European Union Statistics on Income and Living Conditions"). Quindi la famiglia e lo stato sociale della famiglia influiscono in maniera predominante sull'abbandono, ancor di più perchè di fronte a difficoltà sempre crescenti ci si trova soli, con pochissimo supporto da parte dello Stato italiano.

Inoltre, da un'analisi sul campo, è emerso che tra le cause che determinano l'allontanamento dagli studi vi sono anche alcuni aspetti didattici e metodologici. Infatti, crediamo che una combinazione tra formazione professionalizzante e formazione disciplinare, possa migliorare la motivazione degli studenti (Fiorentino et al, 2015) e pertanto ridurre la tendenza ad abbandonare gli studi precocemente. Quindi è necessaria un'integrazione tra contenuti disciplinari e discipline professionali, che permetta di cogliere l'importanza dello studio di discipline apparentemente lontane dalle professioni, quali per esempio la Matematica e la Lingua Italiana, finalizzate all'acquisizione di competenze professionali e al miglioramento della qualità dello sviluppo professionale, obiettivo del percorso di studi. Questo aspetto è molto più accentuato per la Matematica, che spesso risulta essere una disciplina lontana da qualsiasi altra disciplina. Inoltre, il legame con il rendimento scolastico nelle discipline non professionali e la tendenza ad abbandonare la scuola risulta essere molto forte. Infatti, esiste anche una stretta correlazione tra la bassa valutazione conseguita dagli studenti che provengono dalla scuola secondaria di primo grado e il loro abbandono scolastico nel primo anno di scuola secondaria di secondo grado (Figura 4).

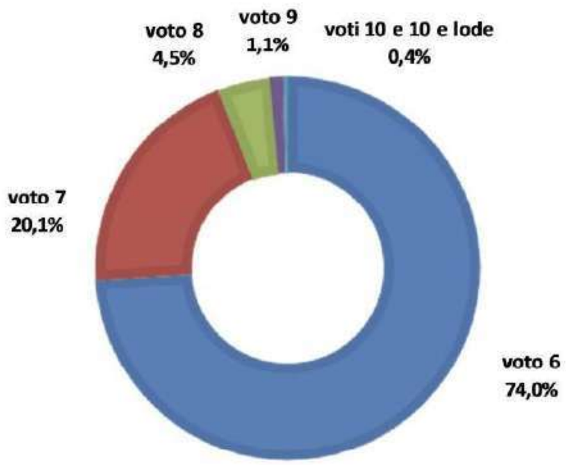


Figura 4 – Abbandono complessivo nel primo anno di corso della scuola secondaria di secondo grado per voto conseguito nell’esame del I ciclo - Fonte: MI – DGSIS – Ufficio Gestione Patrimoni Informativo e Statistica - ANS

Il progetto e il corso di Formazione

Il progetto di ricerca si inserisce in questo contesto, focalizzandosi maggiormente sulla dispersione scolastica negli istituti professionali, in particolare negli indirizzi attivi nelle scuole del territorio (Fiorentino et al, 2021):

- Manutenzione e Assistenza Tecnica
- Servizi per la Sanità e Assistenza Sociale
- Indirizzo Odontotecnico,
- Indirizzo Ottico
- Industria e Artigianato Made in Italy
- Servizi Culturali e dello Spettacolo
- Agricoltura e Sviluppo rurale
- Agrario

Si è partiti da un’indagine sul campo che ha permesso di stabilire che i ragazzi che abbandonano percepiscono la Matematica come una disciplina priva di senso e che a loro non serve a nulla. Inoltre, la percezione che gli studenti hanno è che la matematica risulta essere lontana dall'operatività della disciplina professionale. Tutto ciò è accompagnato da voti estremamente negativi in Matematica.

L’obiettivo del progetto è quindi diventato più specifico, ovvero dare senso (Wake, 2014) alla Matematica attraverso la disciplina professionale e viceversa, far emergere la Matematica nel contesto disciplinare (Nemirovsky et al, 2017). Tali obiettivi risultano essere strettamente legati alla formazione dei docenti: formare gli insegnanti (di matematica e di discipline di indirizzo) su metodologie innovative per individuare degli itinerari didattici co-disciplinari.

È proprio in quest’ottica che è stato progettato un corso di formazione (Schoenfeld, 2018), rivolto contemporaneamente agli insegnanti di Matematica e di discipline di indirizzo delle scuole aderenti, mirato a far emergere la valenza della co-disciplinarità (Fiorentino et al., 2022a).

In quest’ottica riteniamo opportuno adattare il costrutto teorico della co-disciplinarità (Blanchard – Laville, 2000), al lavoro degli insegnanti. Per far fronte alla difficoltà di avere insegnanti esperti in più discipline, si ritiene opportuno lavorare in team, dove ogni componente può raggiungere una certa familiarità con i saperi degli altri insegnanti (Faggiano et al, 2017). Ed è proprio questa modalità di lavoro che permette di co-pensare, co-strutturare, co-agire.

La formazione dei docenti ha avuto inizio con la ridefinizione di alcune teorie didattiche ritenute indispensabili. Tra queste, particolare attenzione è stata data alla teoria delle situazioni (Brousseau, 1986) e alla teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi e Mariotti, 2009). In accordo con Brousseau (1986), le situazioni a-didattiche risultano molto motivanti e significative e fanno intravedere la co-presenza di più discipline. Anche la teoria della mediazione semiotica risulta adeguata, perché prevede l’utilizzo di artefatti con potenziale semiotico utile a costruire i significati, che nel caso del nostro progetto sono sia significati matematici, sia significati legati alla professione.

Il percorso di formazione ha previsto più fasi:

FASE 1 - Riconoscimento dell’utilità di un lavoro co-disciplinare. A partire da due domande stimolo, la prima per gli insegnanti di discipline professionali, la seconda per gli insegnanti di Matematica, gli insegnanti hanno discusso le potenzialità di un lavoro in sinergia tra la matematica e le discipline professionali. Le domande sono state fornite tramite l’ausilio di un Padlet (Figura 5).

1. “Al primo o al secondo anno quale è o quali sono gli argomenti della tua disciplina che risultano più ostici? Perché?”
2. “Al primo o al secondo anno quale è o quali sono gli argomenti di Matematica che risultano più ostici? Perché?”

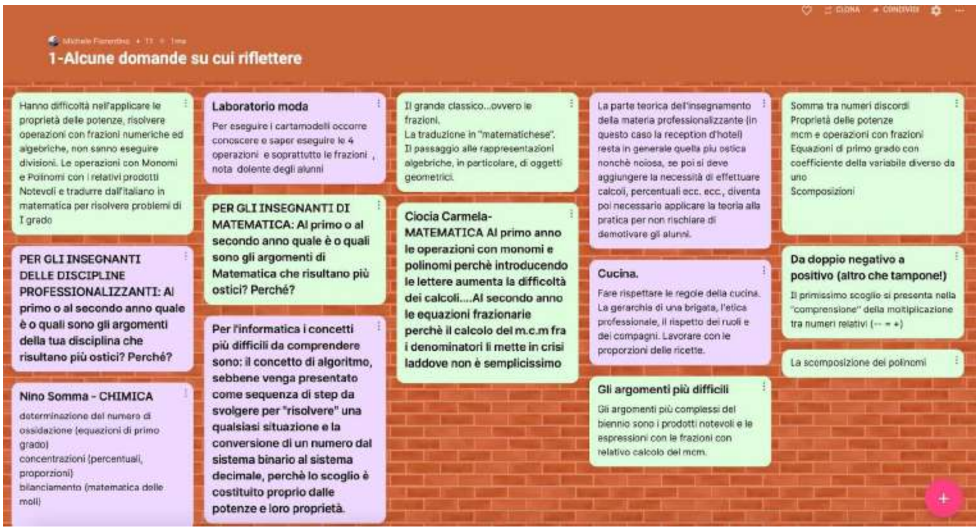


Figura 5 – Risposte al padlet

FASE 2 – Individuazione di artefatti proveniente dalla disciplina professionale

FASE 3 – Analisi dei potenziali semiotici di tali artefatti sia dal punto di vista della Matematica e sia da quello professionale

FASE 4 – Strutturazione di itinerari didattici da sperimentare nelle classi

Gli artefatti "professionali": il caso del cartamodello

In questo contributo, si presenta l'analisi di un particolare artefatto: il "cartamodello" (Figura 6) utilizzato dal docente di indirizzo "Industria e artigianato per il made in Italy" come strumento didattico per la modellizzazione e realizzazione di un pantalone.

L'analisi del "duplice" potenziale semiotico, quello legato ai concetti matematici evocati e quello legato alla disciplina professionale, ha permesso la strutturazione di una progettazione didattica co-disciplinare. (Fiorentino et al., 2022b).

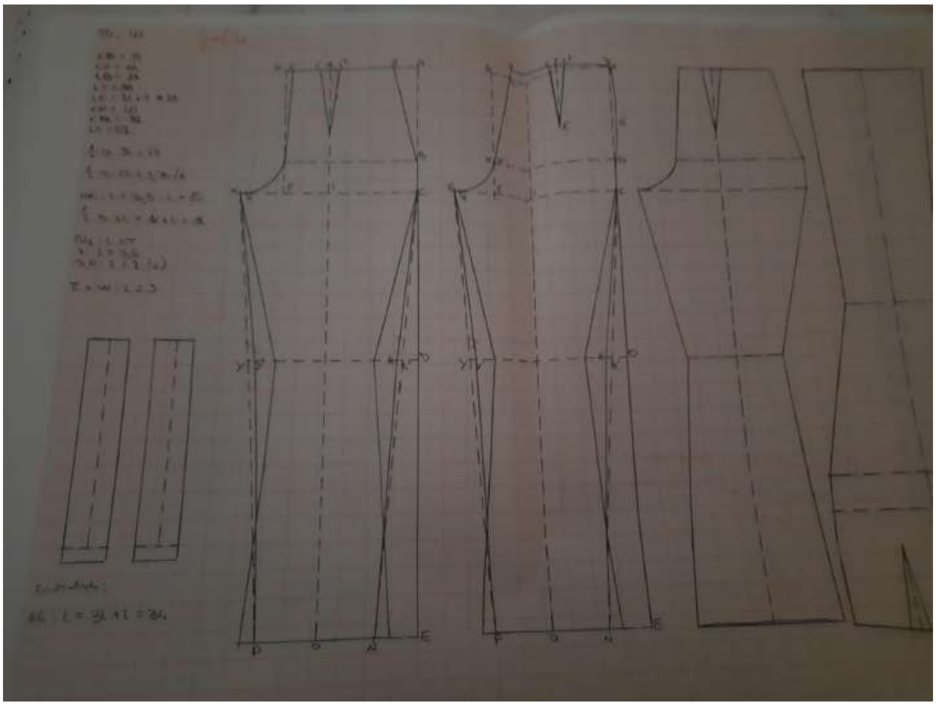


Figura 6 – Cartamodello di un pantalone

Tale artefatto viene utilizzato per la riproduzione di un indumento, come ad esempio il pantalone, tenendo conto delle relazioni geometriche per realizzarlo. Infatti, è possibile identificare gli assi di simmetria che permettono di riprodurre esattamente il modello simmetrico di un quarto di gamba. Si riconoscono le lunghezze delle circonferenze relative al giro vita e al giro bacino che sono in proporzione tra loro. Inoltre, le misure con cui si realizzano i cartamodelli sono legate alle taglie e quindi per passare da una taglia all'altra è necessario utilizzare opportune proporzioni. Infine, gli studenti dopo aver realizzato il cartamodello in formato originale, lo riportano su un loro blocco appunti in formato A4 per avere una "collezione" di cartamodelli in scala da poter riutilizzare. Questa trasformazione è effettuata mediante l'utilizzo di un ulteriore artefatto: il "quartometro" (Figura 7). Tale artefatto è un vero e proprio righello costruito col rapporto 1:4. Il rapporto 1:4 non è casuale, ma è necessario, perchè legato alle due simmetrie assiali del corpo. Infatti per realizzare un pantalone si considera l'asse di simmetria che passa per il centro del cavallo e l'asse di simmetria laterale che divide la parte anteriore dalla parte posteriore. Tale rapporto inoltre viene trasferito su tutte le misure del pantalone per creare un modello perfettamente proporzionale.

Figura 7 – Il Quartometro

Conclusioni

Il problema della dispersione scolastica negli Istituti Professionali, coinvolge una molteplicità di aspetti sociali, culturali, economici ed educativi che induce verso una riflessione sulla complessità del fenomeno. In particolare, la Didattica della Matematica e la Didattica delle discipline professionali, sono chiamate a scendere in campo e a strutturare in sinergia percorsi didattici di natura co-disciplinare, finalizzati a favorire la riduzione di tale fenomeno. La ricerca di senso delle attività matematiche e allo stesso tempo la comprensione della struttura sottostante le attività delle discipline professionali richiedono un costante dialogo tra insegnanti "esperti" di Matematica, in grado di riconoscere la matematica sottostante le attività delle discipline professionali, e insegnanti "esperti" di discipline professionali in grado di mettere in evidenza la matematica necessaria al contesto disciplinare.

Inoltre, la tematica affrontata in questo articolo risulta essere ancora di più al centro dell'attenzione, dopo che la situazione pandemica Covid-19, ha accentuato il fenomeno dell'abbandono scolastico. Vi è una richiesta molto elevata nel territorio, di figure professionali specializzate che risultano sempre più carenti, soprattutto nel periodo post pandemico. Dopo la riapertura, in seguito all'emergenza sanitaria, ci si è accorti ancor di più della mancanza di addetti al lavoro specializzati come ad esempio ai servizi socio-sanitari, ai servizi assistenziali, ai servizi della ristorazione e altre attività manifatturiere, e che quindi potrebbe indurre ad un'ulteriore crisi socio-economica. Emerge pertanto, il problema della formazione degli insegnanti che in tale nuovo scenario sociale risulta spesso inadeguata. Tale inadeguatezza è manifestata dagli stessi insegnanti, i quali dichiarano il loro disagio di sentirsi non sufficientemente preparati ad assolvere il compito di educatori per la formazione delle future professioni dei loro studenti. La didattica co-disciplinare si pone in una situazione complessa da attuare perchè, da un lato risulta ormai consolidata la consuetudine didattica di introdurre la Matematica come disciplina avulsa dalla realtà professionale e distante da applicazioni a problematiche reali, e dall'altro lato può risultare di difficile attuazione la "novità" della proposta di dialogo mai sperimentato tra la Matematica e le discipline professionalizzanti. Tuttavia, riteniamo indispensabile e opportuno cambiare strategia, per dare risposte ad una situazione sociale e didattica a disagio.

Riferimenti bibliografici

BARTOLINI BUSSI, M.G., & MARIOTTI, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32, 269-294.

BLANCHARD-LAVILLE C. (2000), “De la co-disciplinarité en sciences de l’éducation”, Revue Française de pédagogie, 132, 1, pp. 55-66.

FAGGIANO E., FIORENTINO M.G., MONTONE A., PERTICHINO M., ROSSI P.G. (2017) Dialogo tra Didattica della Matematica e Didattica Generale: problemi e sinergie, Italian Journal of Educational Research, Numero Speciale, p. 255-272, ISSN 2038-9744

FIORENTINO M. G. , MONTONE A., ROSSI P. G., TELLONI A.I. (accettato per la pubblicazione, 2022a). Pre-service primary teachers’ professional development through an educational path in remote learning designed with an interdisciplinary perspective. HELMeTO2022, Palermo, 21-23 settembre 2022.

FIORENTINO M. G. , MONTONE A., RICCIARDIELLO G. (2022b). La Matematica in sinergia con le discipline professionali per ridurre la dispersione scolastica: il caso del “cartamodello” come artefatto co-disciplinare. XXXVI convegno Nazionale incontri con la matematica: Didattica della matematica come attività di ricerca in aula. 21-23 ottobre 2022, Castel San Pietro (Bo)

FIORENTINO M. G., MONTONE A., RICCIARDIELLO G., PERTICHINO M. (2021). La matematica negli istituti professionali: una ricerca per ridurre la dispersione scolastica. L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, vol. 44B N.4, p. 339-363, ISSN: 1123-7570

FIORENTINO M. G., MONTONE A., PERTICHINO M. (2015) “Disequazioni e sistemi di disequazioni per i cuochi: l’insegnamento dell’algebra in un istituto professionale alberghiero” in “Insegnare e imparare Matematica e Fisica: insegnanti e studenti per una Didattica inclusiva”, ed. Ledizioni Ledipublishing, 2017, pp. 271-279, ISBN 9788867056224

GAY, G. (2010). Culturally responsive teaching: Theory, research, and practice. Teachers College Press.

NEMIROVSKY, R., KELTON, M. L., & CIVIL, M. (2017). Towards a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education, pp. 968-980, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

SCHOENFELD, A. H. (2018). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. ZDM, 50(3), 491-506.

WAKE, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. Educational Studies in Mathematics, 86(2), 271-290.

RELAZIONI E REGOLARITÀ: UNA MATEMATICA PER SCOPERTA CHE NON LASCIA SOLI

Antonella CASTELLINI[1], Alfia Lucia FAZZINO[2], Rosa SANTORI[3]

[1] *I.C.1, Poggibonsi (SI)*

[2] *I.C.1, Poggibonsi (SI)*

[3] *I.C. C.Angiolieri , Siena*

Riassunto

Maria Montessori: "Ecco dunque un principio essenziale: insegnare i dettagli significa portare confusione. Stabilire la relazione tra le cose, significa portare la conoscenza". Partiremo proprio dalla relazione con la Matematica, analizzando le risposte ad un questionario costruito circa 22 anni fa da Nadia Raviele, laureata in matematica, e Rosa Santori, specializzata in pscicologia differenziale e scolastica. Il questionario "io e la matematica" è stato usato da noi per tanti anni e molte sono state le indicazioni ricevute.

"L'attenzione e la voglia di imparare di un bimbo/ragazzo va conquistata non imposta con la paura di un brutto voto" A.Manzi. E la si conquista cercando e costruendo una buona relazione con lui. Per questo il laboratorio si baserà sulle suddivisioni di un quadrato in triangoli tali da poter analizzare relazioni interessanti in cui si intrecciano aspetti aritmetici e geometrici. Le attività possono essere utilizzate in verticale con pochissimi accorgimenti.

Introduzione

Il solo modo per andare lontano è andarci bene, sosteneva Robin Martin. Dobbiamo costantemente insegnare il gusto di chiedersi e del cercare il perché delle cose. Il gusto di argomentare le proprie posizioni in maniera coerente e critica, come del resto ci suggeriscono le Indicazioni Nazionali.

Spaccando un quadrato

L'attività proposta prende spunto da un lavoro di Maria Montessori.

Unendo i punti medi di due lati opposti di un quadrato, dividiamo lo stesso in due rettangoli. Continuiamo a dividere: i rettangoli vengono divisi a metà secondo il lato maggiore e quindi il quadrato viene diviso in quattro parti che sono dei quadrati; ognuno di essi è la metà del rettangolo precedente e sono tutti uguali tra loro. Questa alternanza rettangoli-quadrati (che risulta ancor più evidente se si continua a suddividere il quadrato) ci porta a parlare di figure simili, cioè figure che hanno diverso valore ma stessa forma. Ci chiediamo come poter riunire tutte le figure uguali tra loro e poi quelle simili.

Si procede poi nello stesso modo ma questa volta "spaccando" il quadrato secondo una diagonale. Dalla prima divisione otteniamo due triangoli uguali tra loro, ciascuno con valore pari a metà del quadrato. Si useranno poi tutte e due le diagonali, ottenendo quattro triangoli uguali tra loro e ciascuno pari alla metà del triangolo precedente. Iterando il procedimento così come fatto sopra, si avranno triangoli sempre più piccoli, pari alla metà di quelli che li precedono. Le due serie di figure quadrangolari e triangolari sono legate tra loro attraverso il quadrato di partenza da cui derivano. Si osserva, che pur avendo forme diverse, avendo diviso il quadrato di partenza lungo la mediana o lungo la diagonale, hanno stesso valore ma forme completamente diverse. Giungere a queste conclusioni, è possibile solo mediante il ragionamento che ci fa capire che sono uguali in valore, mentre i sensi ci porterebbero a dire che sono figure diverse. Ciò ci porta al concetto di figure equivalenti, dopo molte riflessioni.

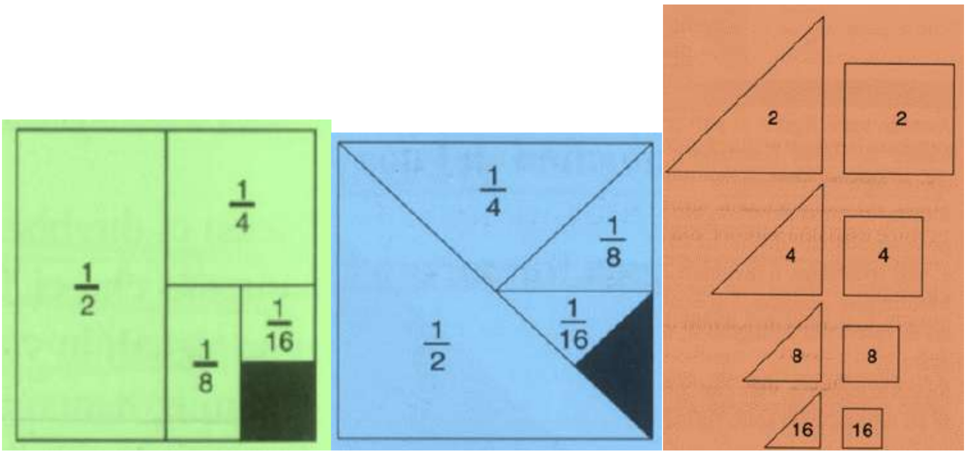


Figura 1 – le suddivisioni

Tagliamo i triangoli e osserviamo una relazione molto importante: l'ipotenusa di uno diventa il lato del triangolo successivo nella sequenza. Riusciamo così a costruire delle spirali.

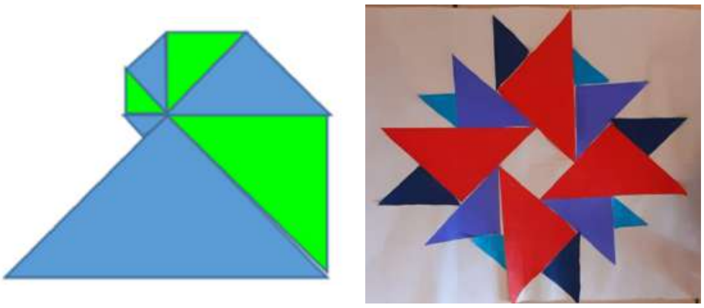


Figura 2 – le spirali

Positivo… Negativo

Continuiamo a "sezionare": stavolta usiamo due quadrati uguali. Dividiamo entrambi in due parti usando la diagonale e coloriamo unodei due triangoli nel primo quadrato, non coloriamo nulla nel secondo quadrato. Continuiamo come da immagine in figura colorando in positivo/negativo.

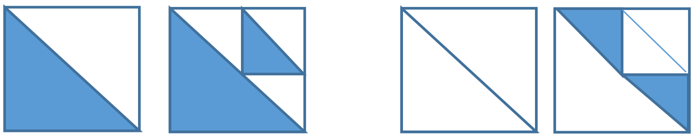


Figura 3 – le prime due suddivisioni della serie A e B

Possiamo continuare idealmente fino all'infinito questa suddivisione che ci porta a osservare una relazione in frazione molto interessante; nella prima serie coloro ½ poi 1/8 poi 1/32 ecc mentre nella seconda serie la parte colorata è ¼, 1/16 ecc .
Sono tutte unità frazionarie che contengono al denominatore le potenze del 2; nella prima serie figurano potenze a esponente dispari mentre nell'altra a esponente pari.
Unendo positivo e negativo risulta evidente che si arriva a colorare interamente il quadrato iniziale.
Dal punto di visto aritmetico abbiamo una serie geometrica che converge a 1.
Proviamo di nuovo a costruire spirali con i triangoli; da cosa dipende la differenza di numero di triangolo usati?

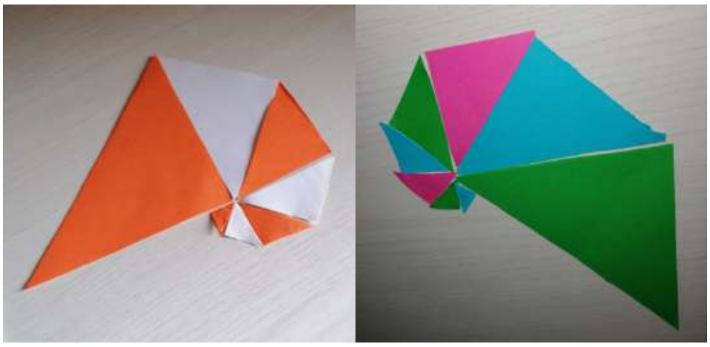


Figura 4 – le due spirali

Dispari in sequenza

A partire dalla costruzione degli gnomoni

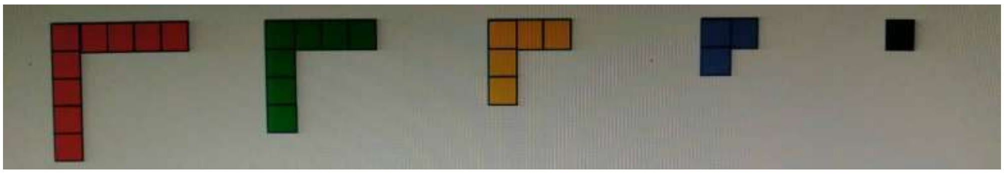


Figura 5 – i primi 5 gnomoni

si arriva a molte considerazioni di tipo aritmetico su cui i ragazzi possono discutere e argomentare:
1 gli gnomoni rappresentano numeri dispari, perché?
2 quale dispari si trova all'n-esimo posto nella sequenza? Perché?
3 viceversa: dato un numero dispari che posto occuperà nella sequenza?

Conclusioni

Nulla viene per caso e "senza fatica" o per un semplice click. Sono percorsi diversi che si devono scegliere e saper inserire al momento opportuno. In classe è sempre necessario ricercare, confrontarsi e collaborare con i compagni e nella scuola lo si dovrebbe fare anche con i colleghi. Si sperimentano e si imparano molte cose, si scambiano le conoscenze, ci si aiuta vicendevolmente. Le attività indicate non lasciano indietro nessuno e favoriscono sia l'apprendimento che lo sviluppo della persona. Le lezioni devono prevedere tempi necessari alla riflessione, alla rielaborazione e anche alla rievocazione di emozioni per poi riprendere in un percorso più difficili scoprendo relazioni e regolarità.

Riferimenti bibliografici

MONTESSORI M., 2013, Psicoaritmetica: Roma, Opera nazionale Montessori
MONTESSORI M., 2012, Psicogeometria: Roma, Opera nazionale Montessori

È LA MATEMATICA CHE REGOLA IL MONDO

Antonella CASTELLINI[1], Alfia Lucia FAZZINO[2], Rosa SANTORI[3]

[1] *I.C.1, Poggibonsi (SI)*

[2] *I.C.1, Poggibonsi (SI)*

[3] *I.C. C.Angiolieri , Siena*

Riassunto

Non esiste differenza di genere, esiste passione, dedizione, determinazione e voglia di imparare ed insegnare per trasformare frasi come "le donne con i numeri sono negate" in "la matematica è un gioco da... ragazze!".
Siamo a proporvi alcune attività di UNA di quelle ragazze: Emma Castelnuovo.
Scopriremo grazie a lei quanta matematica è presente nel mondo che ci circonda e in particolare ci soffermeremo su Botanica, Zoologia, Anatomia e Fisica. Vedremo come, con delle semplici attività da fare, sia possibile congetturare, seguire un ragionamento, scoprire proprietà insomma vedere e toccare aspetti della Matematica presenti intorno a noi. Una Matematica in cui non bisogna "credere" ma piuttosto osservare e sperimentare, fare esempi e controesempi anche attraverso artefatti; come dice la stessa Emma "fare per capire" perché è così che la matematica persegue il modo di formare persone libere nel pensiero. Già Guido Castelnuovo nel 1912 scriveva "a mio avviso occorre accostare ad ogni passo la teoria all'esperienza, la scienza alle applicazioni. Si eviterà in tal modo di perdere il senso del reale che è tanto necessario nella vita e nella scienza. Se soffochiamo negli allievi il senso pratico e lo spirito di iniziativa noi mancheremo al maggiore dei nostri doveri." Quando usiamo le mani e gli oggetti artefatti, ci sono componenti diverse del nostro modo di indagare e di conoscere che vengono attivate e parti del nostro cervello che, come oggi le neuroscienze hanno dimostrato, aiutano a ragionare sui numeri e sulle forme.

Introduzione

Se si parla di matematica si parla anche di numeri: numeri grandi e numeri piccoli, come usavano chiamarli i greci. Poi gli uomini cominciarono a guardarsi intorno, a osservare e a pensare: osservarono le distanze tra paese e paese, tra terra e sole, pensarono al numero dei granelli di sabbia, ai chicchi di grano ecc. Ma per avere l'idea di un numero si deve metterlo in relazione con altri numeri; "numeri grandi e numeri piccoli" è una frase che di per sé non significa nulla se i numeri si pensano uno staccato dall'altro, perché il numero acquista un valore, un significato, solo se lo si pensa "contornato" da altri numeri. Ogni fatto dipende da un altro fatto, ogni fenomeno è funzione di un altro fenomeno. Ma in quale modo dipende? Come potremmo precisare e rappresentare queste funzioni? A partire da alcune osservazioni concrete in grado di favorire l'inclusione, affronteremo alcuni concetti importanti quali leggi matematiche e sperimentali e la loro rappresentazione.

La Proporzionalità diretta attraverso la Botanica

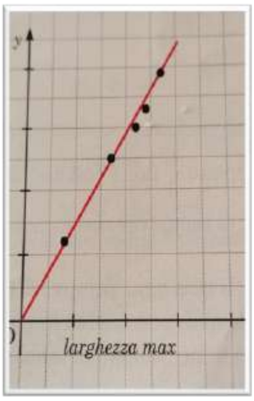
Il laboratorio inizia con una osservazione delle foglie di una qualunque pianta. Sullo stesso ramo si trovano foglie piccole e grandi.

Fig. 1 Foglie di rosa

Nascono subito alcune domande:

- Come sono disposte le foglie sui rami? (Fillotassi)
- Come crescono le foglie?
- Perché foglie piccole e grandi?

Gli studi di botanica portati avanti da Leonardo nel corso della sua vita, mettono in evidenza come il suo disegno avesse una solida base "scientifica", capace di rappresentare fedelmente una realtà in costante evoluzione. Alcune intuizioni di Leonardo hanno aperto la strada alle scoperte successive: ad esempio che le foglie sono disposte sui rami non in modo casuale, ma secondo leggi matematiche; che la crescita delle foglie è tale da evitare la sovrapposizione, in favore dell'approvvigionamento di luce; che gli anelli concentrici che si trovano all'interno dei tronchi sono legati all'età della pianta ecc. Ma è con Galileo (1564-1642) che si precisa il legame tra leggi matematiche e leggi sperimentali. Abbiamo detto che le foglie non sono tutte della stessa dimensione ma "si assomigliano" tutte. Con un righello quindi misuriamo la lunghezza e la larghezza massima di ciascuna foglia. Registriamo le misure su una tabella e spingiamo gli alunni verso un confronto basato sul rapporto fra queste due lunghezze. Riportiamo poi le misure in un sistema di assi cartesiani: sull'asse x la larghezza e sull'asse y la lunghezza. Chiediamo ai ragazzi cosa si aspettano e perchè e verifichiamo. Tenendo conto della difficoltà e della imprecisione della misura, comngiungendo i punti otterremo una retta uscente dall'origine che conferma la proporzionalità e dunque la similitudine delle foglie



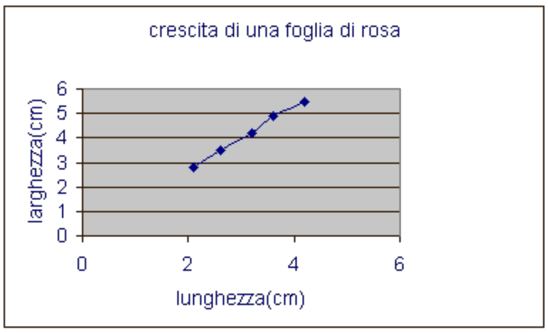


Fig. 3 Grafici

La Proporzionalità inversa attraverso la Botanica

Come risale l'acqua dalle radici fino alle foglie più alte? Il fenomeno è quello della capillarità che si manifesta con la risalita di un liquido lungo un tubo con sezione minore di un mm^2 (capillare); in particolare la risalita è inversamente proporzionale alla sezione del capillare, il che significa che più è piccolo il capillare maggiore sarà l'altezza raggiunta dall'acqua.
Simuliamo questa situazione affiancando due lastre di vetro da una parte unite con mollette e dall'altra separate da uno stuzzicadenti. Le due lastre così predisposte vengono inserite in una bacinella con acqua colorata che risalendo per capillarità mette in evidenza una iperbole a giustificare appunto la proporzionalità inversa.

Fig. 4 La capillarità e le lastre di vetro

E nel mondo animale?

Nell'immagine seguente tratta dal testo di Emma Castelnuovo, risulta evidente come siano diversi i rapporti nel corpo a seconda dell'età; nel feto la testa corrisponde alla metà dell'altezza totale mentre in età adulta è circa 1/8.

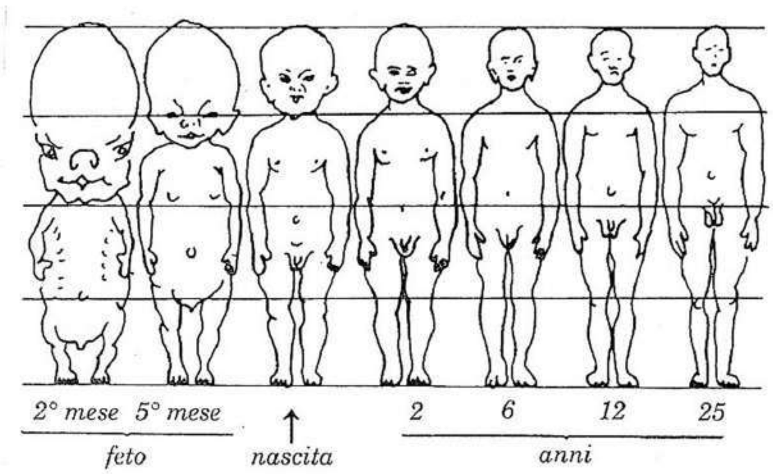


Fig. 5 rapporti e corpo umano

Nell'uomo la crescita in generale è allometrica ovvero non mantiene i rapporti; l'unica eccezione sono le mani e piedi che hanno una crescita isometrica quindi la legge che lega la lunghezza della mano a quella dei piedi è sicuramente lineare.

Conclusioni

Il percorso è basato sulla didattica laboratoriale dove il laboratorio di matematica è inteso "sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive" (I.N.2012). La costruzione di significati deriva infatti da attività stimolanti e motivanti e presuppone che sia negoziata attraverso la discussione. Naturalmente, come sosteneva già Emma, non intendiamo, con la considerazione di modelli concreti, con suggestioni di carattere intuitivo, sostituire la dimostrazione rigorosa di questa o quella proprietà; si vuole solo presentare l'idea di Emma che vedeva la Matematica come uno strumento per legarsi alla realtà della vita.

Bibliografia e sitografia

DEGLI ESPOSTI C., LANCIANO N., Emma Castelnuovo, L'asino d'oro, 2016

CASTELNUOVO E., La via della matematica, I numeri, La nuova Italia, 1962

CASTELNUOVO E., Leggi Matematiche, La nuova Italia

CASTELNUOVO E., Geometria Intuitiva, La nuova Italia,1949

CASTELNUOVO E., Pentole, ombre e formiche, Utet 2017

NON TOGLIETEMI LE ORE DI ITALIANO: DALL'INDAGINE CON LA GEOMETRIA DINAMICA ALLA SCRITTURA ARGOMENTATIVA

Elisabetta OSSANNA[1], Stefano PEGORETTI[2], Marta ZATTARA[3]

[1]DiCoMat Lab - Università di Trento, Trento (TN)

[2]ITET G. Floriani, Riva del Garda (TN)

[3] IIS G. G. Trissino, Valdagno (VI)

Riassunto

In questo contributo si descrive un'esperienza didattica che si pone l'obiettivo di motivare gli studenti a utilizzare il linguaggio della matematica per sostenere con argomentazioni valide le proprie affermazioni, privilegiando attività di gioco-indagine ambientate in contesti che riproducono situazioni geometriche e creati con sistemi di geometria dinamica. La sperimentazione si è svolta in una prima classe di un istituto tecnico tecnologico con la compresenza dell'insegnante di lettere.

Introduzione

Il contesto nel quale abbiamo deciso di operare è quello degli istituti tecnici in quanto, come emerso da diverse interviste a docenti di tali istituti, la trattazione della geometria è trascurata da un punto di vista didattico, molto più che in altri ambienti, e affrontare la scrittura di un testo argomentativo di carattere scientifico risulta un obiettivo difficilmente perseguibile. Il lavoro qui presentato è tratto dalla tesi di laurea di Marta Zattara [Zattara 2019]. C'è anche un aspetto più generale di cui vorremmo tenere conto: il ragionamento deduttivo occupa un ruolo marginale nell'insegnamento della matematica e questo, come evidenzia il mondo della ricerca, porta a un impoverimento del pensiero matematico che gli studenti possono sviluppare. Di conseguenza gli studenti sono poco motivati a sostenere una tesi attraverso una dimostrazione, cercano per quanto possibile di evitarla e associano un certo disagio allo studio della geometria nella scuola secondaria di secondo grado.

La nostra scelta è quella di utilizzare sistemi di geometria dinamica che ci permettono di stimolare l'interesse degli studenti in situazioni di sfida o di promuovere la formulazione di congetture in ambienti di libera indagine. Ci proponiamo di motivare gli studenti a utilizzare il linguaggio della matematica per sostenere con argomentazioni valide le proprie affermazioni, privilegiando attività di gioco-indagine ambientate in contesti che riproducono situazioni geometriche e creati con sistemi di geometria dinamica.

La sperimentazione si è svolta in una prima classe di un istituto tecnico[1] con la compresenza dell'insegnante di lettere, sempre coinvolgendo due ore consecutive di lezione. Possiamo individuare quattro fasi principali per ogni situazione problematica affrontata.

- Nella prima fase gli studenti hanno il compito di esplorare una certa situazione a coppie. Si prevede il supporto di un applet appositamente progettata *(link attività:* https://www.geogebra.org/m/chspp5ba*)* che innesca una sfida con l'intento di accrescere la motivazione degli studenti per stimolarli alla ricerca di una spiegazione geometrica.

[1] Istituto ITET Floriani di Riva del Garda

- La seconda fase è quella che potremmo nominare di analisi e giustificazione. Si analizzano le esperienze verificatesi nell'esplorazione, da un punto di vista geometrico. Partendo dalla descrizione dei risultati ottenuti si passa a trovarne una giustificazione.
- Il terzo passo riguarda la fase del "se . . . allora". Si chiede agli studenti di riscrivere la congettura ipotizzata nella fase di indagine in un modo più "formale e matematico".
- L'ultima fase è quella di revisione dei testi degli studenti.

In questo lavoro proponiamo le due attività principali dell'intero percorso, secondo la struttura appena presentata: l'attività introduttiva che riguarda l'area di un quadrilatero vincolato ad un rettangolo e quella conclusiva che riguarda le condizioni, tra quelle proposte, per ottenere un triangolo rettangolo.

I riferimenti teorici

All'inizio della scuola superiore gli alunni si approcciano alla geometria euclidea e in molti casi viene proposta loro la dimostrazione di determinati teoremi. In Mariotti [Mariotti, 1998] si evidenzia come in questo frangente gli studenti potrebbero trovarsi spaesati in quanto viene chiesto loro di provare la validità di affermazioni geometriche da loro già incontrate, con un approccio intuitivo, nel corso del primo ciclo. Gli studenti potrebbero non capire come mai, una cosa ritenuta vera fino a quel momento, richieda improvvisamente una giustificazione di validità. Il problema principale sta quindi nel passaggio da quella che viene detta geometria empirica, basata sull'intuizione, alla geometria deduttiva, basata sulla dimostrazione matematica. Sempre in Mariotti [Mariotti, 1998] si propone di sfruttare contemporaneamente le opportunità offerte dai software di geometria dinamica e dalla pratica della discussione matematica. Gli studenti partono da un problema di costruzione da svolgere all'interno del sistema dinamico. Le caratteristiche del software fanno sì che le costruzioni in questo ambiente vengano eseguite seguendo le regole della geometria euclidea, quindi in modo analogo a quelle che si otterrebbero riproducendole a mano con riga e compasso. Il vantaggio dei sistemi dinamici è dato però dal fatto che trascinando i vari punti sullo schermo gli studenti potranno esplorare una grandissima varietà di esempi differenti, cosa che non potrebbero fare sulla carta. Inoltre se gli studenti eseguono una costruzione in modo preciso su un foglio quadrettato, sarà difficile convincerli di dover effettivamente dimostrare se la costruzione sia corretta o meno. Nel caso in cui invece la stessa costruzione venga eseguita all'interno del sistema dinamico sarà più facile che i ragazzi sentano la necessità di giustificare il risultato ottenuto. All'interno di questo ambiente, dunque, gli studenti presteranno attenzione più al processo eseguito che al prodotto finale ottenuto, e vorranno verificare la validità di tale procedura.

Un altro utilizzo dei software di geometria dinamica può avvenire nell'ambito dei "problemi aperti" [Antonini & Baccaglini Frank, 2015], cioè problemi che non forniscono agli studenti una richiesta precisa, ma che li spingono ad indagare ed esplorare in modo libero una certa situazione. Richieste tipiche di tali problemi potrebbero essere, ad esempio le seguenti: "quale configurazione assume … quando ...?", "che relazione riesci a scoprire tra ... e …?", "in quale tipo di figura può essere trasformato?". L'esplorazione di problemi aperti è sicuramente facilitata e migliorata dall'utilizzo di un sistema dinamico, il quale permette di indagare un gran numero di configurazioni differenti, supportando lo sviluppo della capacità di argomentare.

Il lavoro presentato si ispira anche alla proposta della ricercatrice C. Soldano, [Soldano, 2016], di indagini basate su dei giochi "geometrici" che i ragazzi possono svolgere all'interno di GeoGebra. Infatti secondo la teoria educativa "gamification theory" si può migliorare il processo di apprendimento degli studenti sfruttando la motivazione indotta dai giochi, che in questo caso si basano su proprietà geometriche da svelare. La sfida stimola inoltre gli studenti alla ricerca di una spiegazione.

Il ruolo dell'insegnante di lettere

Durante tutto il percorso abbiamo lavorato in compresenza con la docente di lettere della classe (prof.ssa Orietta Masserini) che interagiva con gli studenti, facendo riferimento a un lavoro pregresso sulla scrittura argomentativa. Rifacendoci alle motivazioni che hanno spinto l'insegnante di lettere a partecipare al progetto troviamo in primo piano l'aspetto di interdisciplinarietà: l'interazione cioè fra materie cosiddette 'scientifiche' e materie cosiddette 'umanistiche', le une e le altre ugualmente coinvolte, sia pure nei rispettivi ambiti, per superare la separazione fra 'le due culture' e verificarne sia le profonde affinità metodologiche, sia la possibile reciproca funzionalità. La stesura del testo richiesta dal progetto può rientrare nella "relazione scientifica", come affrontata nell'ambito dell'apprendimento della lingua italiana, "scritte – citando la professoressa stessa - in discreto italiano ma al tempo stesso confacenti allo scopo, aventi cioè i requisiti di un testo di carattere tecnico-scientifico; uno scopo dunque apparentemente 'normale' in un istituto tecnico, ma che spesso non trova spazio nell'insegnamento linguistico-letterario e nemmeno in quello delle discipline scientifiche." L'obiettivo diventa quindi quello di trasformare le abilità linguistiche, apprese nel corso delle lezioni di italiano, in competenze trasversali. Il ruolo dell'insegnante di italiano, da lei definito come "ausiliario" rispetto all'obiettivo principale, consiste nel collaborare con i ragazzi chiedendo loro di spiegare cosa fanno, nonché il significato dei termini specifici che utilizzano, proponendosi dunque come una loro pari, a cui devono esplicitare ogni cosa. Ne segue che si analizzano insieme la coerenza delle risposte alle richieste proposte dalle esercitazioni geometriche e infine si stimolano gli studenti a individuare e ordinare le osservazioni fatte e le soluzioni trovate in un testo unico, vale a dire in una 'relazione tecnico-scientifica'. Inoltre al termine di ogni attività c'è un'analisi condivisa con il docente di matematica, segnalando i passaggi incompleti o poco comprensibili, senza però dare indicazioni riguardanti una possibile correzione con la consegna di riscrivere il testo tenendo conto dei feedback ricevuti.

Il problema introduttivo: il quadrilatero dall'area dimezzata

I ragazzi hanno a disposizione un applet[2] in cui è rappresentato un rettangolo ABCD con un'area di 60 unità (Figura 1).

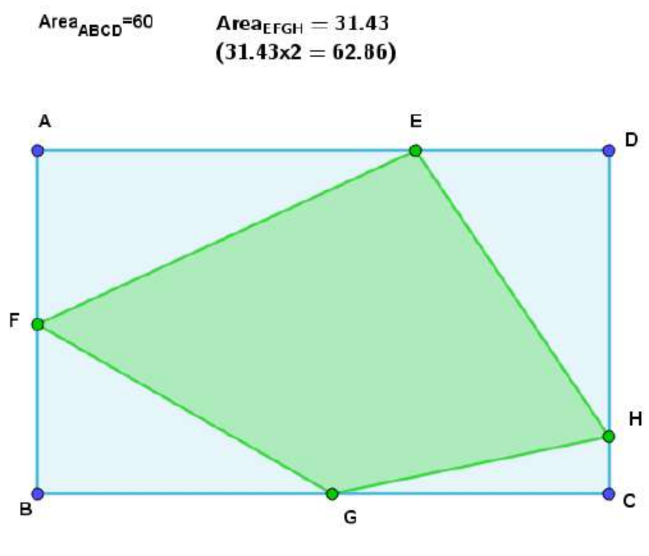


Figura 1 – Aspetto dell'applet

[2] https://www.geogebra.org/m/chspp5ba#material/vnxjt3b8

Su ogni lato di ABCD è collocato un punto che è vincolato a rimanere sul lato a cui appartiene. Il quadrilatero EFGH può dunque essere modificato spostando i vertici lungo i lati del rettangolo. Agli studenti viene chiesto di spostare i punti E, F, G, H fino a trovare quattro quadrilateri diversi che abbiano area pari alla metà dell'area del rettangolo[3]. Per facilitare il compito degli studenti abbiamo indicato sopra ad ABCD i valori numerici riportanti l'area del rettangolo e l'area del quadrilatero (Figura 1). Questa prima parte dell'attività viene presentata nel seguente modo agli studenti:

Nell'applet GeoGebra che ti è stata data è rappresentato un rettangolo ABCD e un quadrilatero EFGH avente ogni vertice su un lato diverso del rettangolo. A lato di questa configurazione invece puoi notare un grafico che rappresenta, in chiaro, l'area di ABCD e più scura l'area di EFGH. Quando sposti i punti E, F, G, H lungo i lati del rettangolo puoi notare come l'area del quadrilatero vari sia osservando come la colonnina scura a lato salga e scenda, sia controllando i valori numerici in alto. Nel grafico è tracciata anche una linea tratteggiata che divide a metà la colonna rappresentante le aree. Quando l'area del quadrilatero è metà di quella del rettangolo i riferimenti sulla linea tratteggiata della colonnina diventano rossi. Sei in grado di ottenere almeno quattro configurazioni differenti in cui l'area del poligono EFGH sia la metà di quella del rettangolo ABCD?

Utilizzando l'applet gli studenti sono portati a individuare la strategia che permetta di trovare dei quadrilateri che soddisfino la richiesta iniziale. Infatti, agli studenti viene richiesto di trovare quattro quadrilateri differenti, anche non regolari e non conosciuti, che soddisfano la richiesta e non solo uno. Infatti, essendoci una figura regolare che soddisfa le ipotesi, cioè il rombo (Figura 2), richiedendo solo una configurazione, c'è il rischio che i ragazzi si soffermino su questa senza procedere oltre e quindi senza individuare la proprietà che li accomuna.

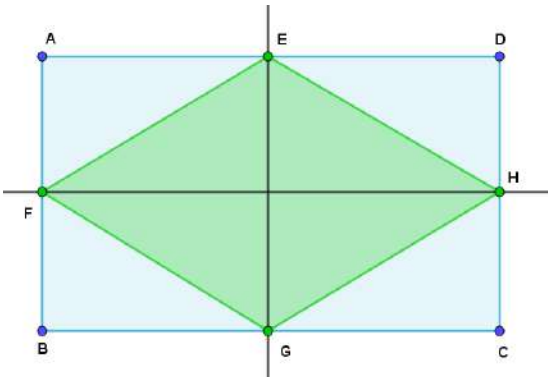


Figura 2 – Il rombo è una delle configurazioni soddisfacenti le richieste

In questa prima fase di indagine ci aspettiamo che i ragazzi muovano in modo abbastanza casuale i punti, prestando attenzione a colonna e numeri per capire quando abbiano raggiunto una configurazione valida. La nostra ipotesi è che inizialmente procedano per tentativi e poi, solo dopo aver individuato una o due configurazioni, gli studenti cerchino una strategia che si basi sulle proprietà geometriche della figura.

In un secondo momento, vorremmo portare i ragazzi a capire che "se due punti opposti del quadrilatero stanno sulla retta parallela a un lato del rettangolo, allora tale quadrilatero avrà area la metà del rettangolo".

Dopo che gli studenti sono arrivati ad esplicitare una strategia e che hanno scoperto che tutte le configurazioni da loro trovate hanno due punti su una retta parallela ad un lato del rettangolo,

[3] Un'attività analoga è stata presentata in da [Soldano & Di Caprio, 2019]

si portano a dimostrare che tale richiesta è una condizione per ottenere le configurazioni richieste.

Gli studenti possono essere stimolati attraverso domande come quelle che seguono.

1. *Durante la fase di sfida a cosa prestavi attenzione al fine di ottenere le configurazioni richieste?*
Con questa richiesta ci aspettiamo di far emergere il pensiero degli studenti che hanno individuato una strategia. Tale strategia è quella di collocare due punti opposti su una retta parallela ad un lato del rettangolo per ottenere le configurazioni che hanno area uguale alla metà di quella del rettangolo. Noi vorremo partire da qui per domandarci se questa condizione sia sufficiente a trovare sempre una configurazione valida.

2. *Le configurazioni valide che hai trovato hanno qualche caratteristica comune*? Questa domanda è stata pensata appositamente per i ragazzi che non hanno ancora individuato la strategia.

3. *Sapresti trovare altre configurazioni aventi le caratteristiche richieste all'inizio della sfida?*

Lo scopo di questo quesito è quello di portare gli studenti a comprendere come sia scomodo individuare tante altre configurazioni vincenti continuando a muovere i punti in modo casuale e di come invece sia utile trovare una "regola" che ci permette di trovare a colpo sicuro una figura corretta. Questa terza richiesta rinforza negli studenti la convinzione che sia utile avere una strategia e quale sia. La discussione che ne segue dovrebbe portare la classe a concludere in modo condiviso che

"Il quadrilatero ha area pari alla metà del rettangolo iniziale se ha due vertici opposti collocati su una retta parallela a uno dei lati del rettangolo".

Si può strutturare la discussione condividendo alcune configurazioni trovate dagli studenti nella fase di sfida. Tracciando la retta passante per due vertici opposti possiamo portare gli studenti ad analizzare i sottorettangoli che si verranno così a formare (Figura 3).

Ogni nuovo rettangolo è a sua volta suddiviso in due triangoli congruenti. Compiendo, allo stesso modo, il ragionamento per tutti i sottorettangoli possiamo concludere che in ognuno di questi la regione contenuta nel quadrilatero è la metà del totale e arriveremo così alla tesi. Il ragionamento fatto può essere generalizzato a una qualsiasi altra configurazione ottenibile tramite l'applet.

Una richiesta che sintetizza le domande precedenti può essere formulata nel modo seguente.

Abbiamo dato ad uno studente di un'altra classe la tua stessa applet GeoGebra e gli abbiamo posto la tua stessa sfida: trovare un quadrilatero EFGH avente area uguale alla metà dell'area di ABCD. Lui però non è riuscito a ottenere nemmeno una configurazione corretta. Spiegagli la strategia che hai scoperto per vincere.

L'obiettivo di questa richiesta è innanzitutto di fare un po' di sintesi e lavorare sulla stesura di un testo normativo a carattere scientifico, ricollegandoci così all'obiettivo generale che è quello di migliorare la capacità di produrre un testo e di cogliere l'importanza dell'utilizzo dei termini corretti.

Nella fase di sperimentazione, una coppia di ragazzi ha osservato come, ponendo due vertici sulla retta parallela a un lato del rettangolo, gli altri due vertici non ancora considerati, possono essere spostati in qualsiasi modo, senza che l'area del quadrilatero si modifichi. Uno dei due ragazzi ha cercato di spiegare ai compagni perché questo accada, facendo riferimento alla figura (Figura 3).

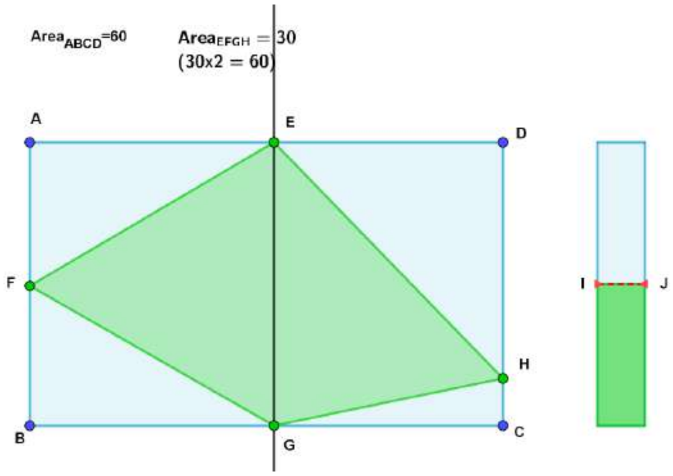


Figura 3 - Fissati due vertici di EFGH lungo la parallela ad uno dei due lati del rettangolo (E e G in figura), gli altri due vertici si possono spostare senza che l'area cambi.

"Vedete…la retta parallela divide EFGH in due triangoli. Questo qui [facendo riferimento ad EFG] ha questa come base [segmento EG] e questa come altezza [tracciando il segmento FK, perpendicolare ad EG e passante per F]. Se spostiamo il punto F il triangolo ha sempre la stessa base e anche la stessa altezza. La formula per calcolare l'area del triangolo è base per altezza diviso due…io non cambio né la base, né l'altezza…anche l'area non cambia. Ma questa cosa vale anche per l'altro triangolo [riferendosi a GHE] quindi tutta l'area di EFGH non cambia."

Per portare gli studenti alla fase del "Se…allora" partiamo da esempi di testi già strutturati, con la seguente consegna.

Vogliamo provare a scrivere quello che abbiamo scoperto utilizzando frasi come la seguente: Se è soddisfatta una certa condizione allora succede una certa cosa.

Nella nostra esperienza solo tre studenti non hanno risposto o non hanno formulato la frase utilizzando correttamente i termini proposti. Ecco invece alcuni esempi di risposte corrette date dagli alunni[4].

- *"Se collochiamo due punti sulla stessa retta parallela e gli altri due in qualsiasi posizione sugli altri lati, allora, il quadrilatero sarà la metà del rettangolo in cui è inscritto".*

  Notiamo che nella risposta entra in gioco sia l'area dimezzata sia il fatto che due vertici si possono muovere liberamente senza che l'area cambi. Tuttavia possiamo anche osservare la presenza di diverse imprecisioni nella risposta. Questi saranno aspetti su cui si dovrà lavorare. Cercheremo, tramite la discussione, di metterli in luce e di approfondire.

- *"Se G ed E sono paralleli allora spostando H ed F l'area non cambierà".*

  Anche in questo caso notiamo l'utilizzo errato della terminologia: lo studente parla infatti di punti paralleli. Inoltre questa risposta ci fa notare come al ragazzo sia rimasta più impressa la scoperta di poter muovere due vertici senza che l'area cambi. L'alunno in questione ha perso di vista l'obiettivo principale, cioè di dover ottenere un quadrilatero con area dimezzata rispetto al rettangolo di partenza e non ha quindi considerato questo aspetto nella risposta. Nonostante ciò l'utilizzo della struttura ipotetico-deduttiva del "se… allora" `e corretto.

- *"Se inseriamo due punti alla stessa altezza nei lati paralleli di un rettangolo allora gli altri due punti nella figura formeranno un quadrilatero con l'area metà del rettangolo".*

[4] Le tre affermazioni riportate in seguito rispecchiano, in generale, quanto riportato dalla classe nelle schede

In questo caso invece, nonostante il "se …allora" sia utilizzato in modo esatto, il ragazzo parla di collocare due punti alla stessa altezza. L'alunno in questione interpreta l'altezza come distanza dal lato, rifacendosi al significato del termine utilizzato nel linguaggio comune. Inoltre ancora una volta si può notare l'identificazione compiuta dagli studenti tra la figura e la sua area. Il ragazzo parla infatti di "metà del rettangolo" anziché di "metà dell'area del rettangolo".

Dall'analisi delle schede degli alunni emergono imprecisioni nell'uso dei termini e nella sintassi. Grazie alla possibilità di collaborare con la docente di lettere si è creata l'occasione di lavorare sulle tre differenti tipologie testuali: testo regolativo, testo descrittivo e infine testo argomentativo.

- Il testo regolativo viene utilizzato quando, ad esempio, si chiede agli studenti di elencare semplicemente i passi che descrivono la strategia scoperta durante la fase di indagine.
- Il testo descrittivo è richiesto quando si domanda ai ragazzi di fare delle osservazioni sulle figure ottenute. Quindi quando viene approfondita la fase d'indagine. Può rientrare nella categoria descrittiva anche l'esposizione dei risultati ricavati mediante la struttura del "se…allora".
- Il testo argomentativo invece è quello che deve essere utilizzato dagli alunni per giustificare geometricamente le affermazioni fatte. La professoressa di italiano, dopo aver letto alcune risposte degli studenti, ha pensato fosse doveroso fare alcune precisazioni: ha spiegato ai ragazzi come una relazione debba essere scritta in modo impersonale, così come i riassunti, che loro avevano più volte eseguito. L'insegnante ha inoltre sottolineato come, nel momento in cui i ragazzi sarebbero andati a scrivere le relazioni, sarebbero diventati loro gli esperti della questione e, in quanto tali, avrebbero dovuto essere loro a spiegare, al lettore, come ottenere un determinato risultato.

Oltre al lavoro sul testo dal punto di vista linguistico abbiamo anche lavorato sull'uso dei termini matematici e sulla correttezza dell'argomentazione. L'errore di gran lunga più ricorrente è stato quello di parlare di "punti paralleli" per descrivere la caratteristica comune a tutte le configurazioni ottenute. Da questo si deduce come probabilmente non sia sempre ben chiara la definizione di determinati oggetti geometrici. Gli studenti sembravano non rendersi conto dell'errore e del fatto che dire che due punti sono paralleli non ha alcun significato. Abbiamo dunque riflettuto con loro sul fatto che due rette possano essere parallele, ma non due punti. Abbiamo chiesto loro una revisione che tenesse conto di questo aspetto. Seguono degli esempi di risposte date, prima e dopo la sistemazione, sono le seguenti:

- "Descrivi la figura ottenuta. Cosa puoi osservare?"

  S1 (Prima): "*Ho ottenuto le figure spostando a tentativi i punti E, F, G, H e osservo che, usando il comando retta parallela, due punti vengono paralleli tra loro*".

  S1 (Dopo): *"Per ottenere le figure bisogna spostare a tentativi i punti E, F, G, H e osservando che quando due punti opposti erano collocati su una retta parallela allora la figura è buona".*

  Notiamo il miglioramento della risposta dopo la fase di revisione, nonostante vada sottolineato come si parla di retta parallela sottintendendo la retta di riferimento.

- "Sapresti trovare altre configurazioni aventi le caratteristiche richieste all'inizio della sfida?"

  S2 (Prima*): "Si, basta posizionare due punti opposti paralleli tra di loro, mentre la posizione degli altri due è indifferente, anche spostandoli si trovava sempre la metà dell'area totale."*

  S2 (Dopo*): "É possibile trovare altre configurazioni posizionando due punti su una retta parallela a due lati opposti del rettangolo, mentre la posizione degli altri due vertici, che non stanno sulla parallela è indifferente, anche spostandoli si trova sempre la metà dell'area totale."*

Vediamo con questo esempio come lo studente abbia cercato di seguire sia i suggerimenti dati dall'insegnante di italiano per quanto riguarda la forma, i connettivi logici e l'uso del linguaggio, sia come abbia modificato la risposta per renderla corretta anche dal punto di vista matematico.

Un secondo errore ricorrente che abbiamo riscontrato è stato l'utilizzo, da parte degli studenti, del termine "piano" al posto di "lato". I ragazzi parlano di "vertici della figura che possono essere uniti da una retta parallela o perpendicolare al piano orizzontale o verticale".

L'indagine fin qui effettuata apre la possibilità di affrontare la necessità della condizione trovata, ovvero: *"Se il quadrilatero ha area pari alla metà di quella del rettangolo allora due vertici opposti del quadrilatero si trovano su una retta parallela a uno dei lati del rettangolo"*.

Si può partire da un'esplorazione con l'applet guidata dalla richiesta: *è possibile ottenere una configurazione corretta posizionando i vertici del quadrilatero in modo diverso da quanto abbiamo scoperto?*

L'utilizzo dell'applet permette di distinguere due casi.

Primo caso: area del quadrilatero maggiore della metà dell'area del rettangolo. Siamo nella situazione rappresentata in figura (Figura 4).

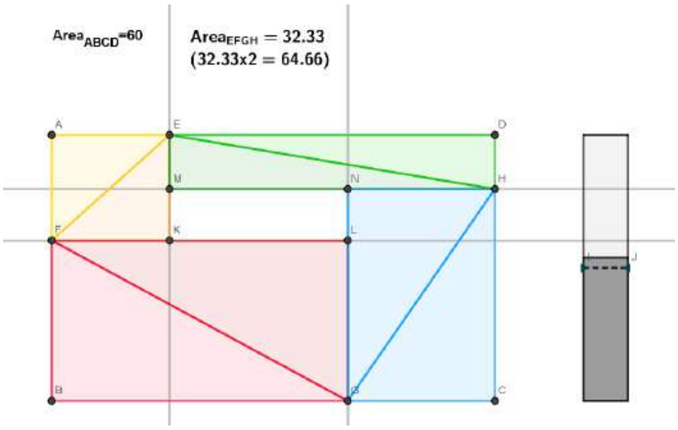


Figura 4 – Quadrilatero EFGH avente area maggiore della metà dell'area di ABCD.

Nell'immagine siamo andati a tracciare le rette parallele o perpendicolari ai vari lati del rettangolo, passanti per i vertici del quadrilatero EFGH. In questo modo abbiamo suddiviso la figura in sottorettangoli. Se osserviamo i rettangoli colorati di giallo, rosso, verde e azzurro in figura possiamo vedere come ciascuno di essi sia suddiviso in due triangoli congruenti, uno dei quali è contenuto nel quadrilatero EFGH, mentre l'altro è ad esso esterno. Considerando solo le regioni colorate abbiamo quindi il quadrilatero con area pari alla metà di ABCD. Tale quadrilatero contiene però anche tutto il rettangolo bianco, quindi la sua area sarà maggiore della metà dell'area di ABCD.

Secondo caso: area del quadrilatero minore della metà dell'area del rettangolo (Figura 5).

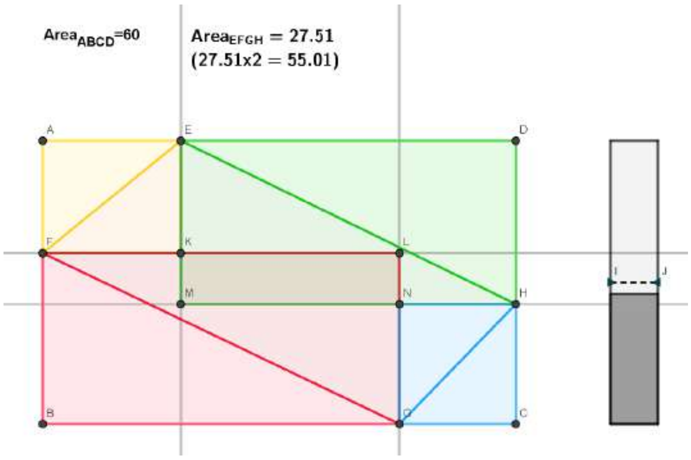


Figura 5 - Quadrilatero EFGH qualsiasi avente area minore della metà dell'area di ABCD.

Ci troviamo ora nella situazione rappresentata in figura. Possiamo notare come valga anche qui il ragionamento fatto per il caso precedente. Ogni sottorettangolo è diviso in due triangoli congruenti, uno dei quali è interno al quadrilatero mentre l'altro è esterno. In questo caso però i due triangoli, rosso e verde in figura, sono in parte sovrapposti. Da qui si può dunque concludere che l'area del quadrilatero sia inferiore alla metà dell'area del rettangolo di partenza.

Il problema conclusivo: triangolo rettangolo

Dopo una serie di attività relative ai triangoli e ai loro punti notevoli, strutturate secondo le quattro fasi descritte nell'introduzione, si arriva all'attività conclusiva che ha come obiettivo quello di portare gli studenti a individuare una condizione sufficiente affinché un triangolo sia rettangolo, per poi trasformare il ragionamento condiviso in un testo scritto che segua i canoni di una giustificazione matematica. Abbiamo organizzato l'applet[5] nel modo seguente: abbiamo creato tre pulsanti, uno per il punto di incontro delle altezze, uno per il punto di incontro delle mediane e infine uno per il punto di incontro degli assi. Nel momento in cui gli studenti selezionano uno di questi elementi, nella figura comparirà il punto corrispondente (Figura 6).

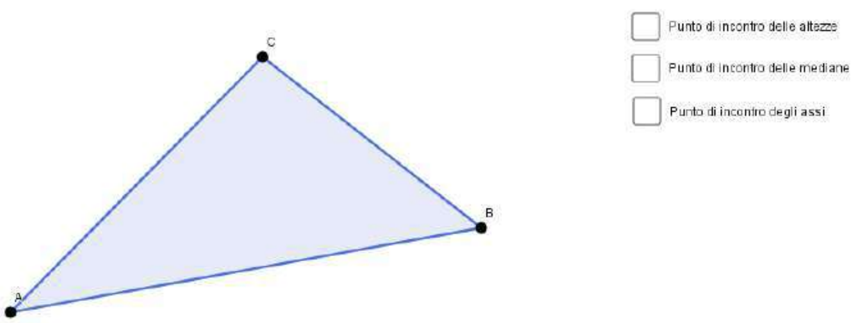


Figura 6 - Aspetto dell'applet fornita agli studenti

Anche in questo caso chiediamo ai ragazzi di modificare ABC fino a farlo diventare rettangolo, utilizzando i pulsanti riportati a fianco come aiuti. In seguito quindi chiederemo loro di

[5] https://www.geogebra.org/m/chspp5ba#material/prnrarfg

descrivere le strategie utilizzate per ottenere i triangoli rettangoli e di fare alcune osservazioni sulla figura ottenuta. Vogliamo perciò che inizialmente gli studenti descrivano solamente le mosse eseguite per ottenere il triangolo richiesto. In un secondo momento vogliamo invece che i ragazzi notino che il punto di incontro delle altezze e il punto di incontro degli assi sono collocati in alcune posizioni particolari, mentre il punto di incontro delle mediane non sia di grande aiuto e non dia grandi indicazioni utili in vista del raggiungimento dell'obiettivo. Domandiamo a questo punto, agli studenti, di riformulare i risultati ottenuti utilizzando i termini tipici del metodo deduttivo. Questo per rimanere in linea con il nostro obiettivo generale che è quello di stimolare e aiutare i ragazzi a descrivere un certo fatto matematico in termini rigorosi e di argomentare se un certo risultato sia valido. In questa attività abbiamo aggiunto qualche ulteriore connettivo che i ragazzi potevano utilizzare per formulare le frasi. La richiesta che abbiamo fatto agli studenti è la seguente:

Prova adesso a riscrivere quello che hai scoperto durante questa attività. Cerca però di esporre i risultati ottenuti in modo più formale. Per fare ciò scrivi quindi delle frasi utilizzando le espressioni della lista sottostante. "Se…allora...", "Ogni volta che… allora...", "... se ...", "Quando ... succede che ..."

È necessario in questa fase che i ragazzi scrivano le due successive affermazioni, poiché sono utili per arrivare alla dimostrazione.

1. Se il punto di incontro delle altezze coincide con un vertice del triangolo allora il triangolo è rettangolo.
2. Se il punto di incontro degli assi si trova su un lato del triangolo allora il triangolo è rettangolo.

Nonostante avessimo suggerito connettivi diversi da "se...allora", 13 studenti su 21 hanno utilizzato solo la terminologia già vista nell'attività precedente, comunque correttamente. Vediamo le altre formulazioni della stessa condizione.

- *"Ogni volta che il punto di incontro degli assi è sulla metà dell'ipotenusa allora il triangolo è rettangolo."*
- *"Quando il punto di incontro delle altezze è sul vertice di 90° succede che si forma un triangolo rettangolo."*
- *"Abbiamo un triangolo rettangolo se abbiamo un angolo di 90°."*

Dalle prime due affermazioni riportate notiamo come i ragazzi abbiano utilizzato i connettivi nel modo corretto per esprimere quanto scoperto con l'applet. Hanno quindi capito il costrutto e non applicano meccanicamente la formulazione introdotta nella prima attività. Per quanto riguarda l'ultima frase, che è sicuramente un'affermazione corretta dal punto di vista della struttura e del significato, non descrive nessuno dei fatti scoperti dai ragazzi durante l'esplorazione. Possiamo osservare quindi che l'alunno è riuscito ad utilizzare la terminologia in modo corretto, ma non ai fini dell'obiettivo richiesto.

La sperimentazione ha previsto una successiva analisi e revisione dei testi che ha portato alla stesura della dimostrazione e che qui non riportiamo.

Verifica conclusiva

L'obiettivo di questa attività conclusiva è quello di osservare se, al termine del percorso proposto, i ragazzi fossero in grado di produrre autonomamente una breve dimostrazione.

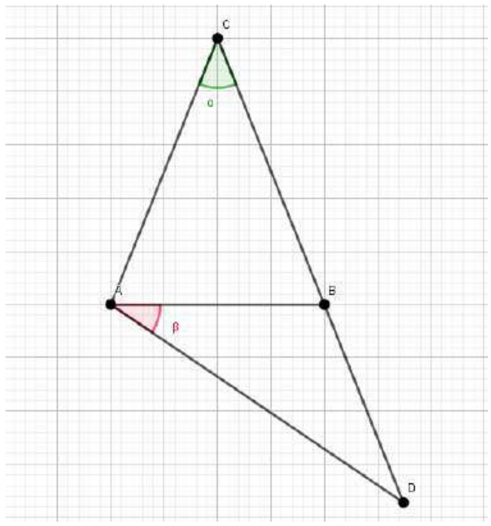
Per cercare di spronare i ragazzi l'attività è stata proposta sotto forma di sfida:

"I giorni scorsi ci siamo recati in altre scuole e abbiamo proposto agli studenti lo stesso problema che ora abbiamo dato a voi. I vostri colleghi non sono stati in grado di provare la validità dell'affermazione . . . voi pensate di riuscirci? …"

Come prima cosa i ragazzi hanno dovuto disegnare la costruzione proposta, che è la seguente

- *Prolunga il segmento CB di un segmento BD = AB.*

- *Unisci il punto A con il punto D in modo da ottenere il triangolo ABD. Indica nella figura*



tutti i lati e tutti gli angoli congruenti che riesci ad individuare (Figura 7).

Figura 7 - Costruzione che gli studenti avrebbero ottenuto al termine della costruzione.

Inizialmente qualcuno ha incontrato qualche difficoltà nel comprendere dove collocare il punto D nominato nella procedura. Alla fine però tutti gli studenti, eccetto uno, sono riusciti a portare a termine la costruzione proposta. Terminata questa fase abbiamo consegnato ai ragazzi la seconda parte della scheda.

Se nel triangolo isoscele ABC rappresentato in figura l'angolo α misura 40° e il segmento BD è congruente ad AB, allora l'angolo β del triangolo ABD misura 35°.

Abbiamo riflettuto, ancora una volta, con i ragazzi sulla struttura dell'affermazione. Abbiamo discusso con loro e cercato di capire quali sono le informazioni a nostra disposizione e cosa invece quello che vogliamo scoprire. Possiamo distinguere tre tipologie differenti di risposte date dagli studenti.

- Tipologia 1: viene fornita una giustificazione molto buona dell'enunciato. Questi testi sono caratterizzati dal fatto che in essi si possono individuare tutti i passaggi necessari per giungere alla conclusione, esposti nel corretto ordine logico, motivando tutti i passi compiuti. All'interno di queste argomentazioni osserviamo che ci sono comunque delle imprecisioni nell'uso di alcuni termini, che però non compromettono la comprensione del testo. (9 studenti)
- Tipologia 2: nelle giustificazioni matematiche sono presenti tutti i passi che permettono di giungere alla tesi partendo dalle ipotesi. Manca però all'interno di questi passi la spiegazione della loro validità. (5 studenti)
- Tipologia 3: la giustificazione è incompleta. Si può capire come questi ragazzi abbiano solo iniziato l'evoluzione finalizzata al raggiungimento dell'abilità di produrre una dimostrazione. (5 studenti)

Miglioramenti osservati

Analizzando le schede degli studenti abbiamo potuto notare il miglioramento ottenuto dalla maggior parte di loro. Per capire il senso di questo miglioramento riporteremo di seguito alcune risposte date da uno stesso alunno nella prima e nell'ultima attività. Durante la prima attività (quadrilatero dall'area dimezzata), dopo che gli studenti avevano individuato una configurazione con area la metà del rettangolo iniziale, avevamo chiesto loro cosa potessero osservare. Questo studente aveva risposto dicendo:

"è un rombo nel quale la retta che passa parallelamente rispetto ad un lato e al suo opposto e perpendicolarmente agli altri due passa per due punti opposti tra loro. La retta non può essere solo parallela o perpendicolare".

Notiamo innanzitutto come lo studente cerchi di rispondere alla domanda e si può inoltre intuire come abbia un'idea di quale caratteristica debba avere la figura individuata. Il modo in cui cerca di esprimersi è però piuttosto contorto. Nella risposta successiva parla di come abbia ottenuto le configurazioni richieste, dicendo:

"Prestavo attenzione di far coincidere due punti su una retta parallela ad un lato e il suo opposto e perpendicolare agli altri due".

Alle due domande successive invece risponde con un "*vedi risposta precedente*" e "*si*". In questi ultimi due casi quindi cerca prima di evitare la scrittura e poi non giustifica la risposta data. Arriviamo quindi alla domanda richiedente di spiegare perché tutte le configurazioni trovate avessero area pari alla metà di quella del rettangolo iniziale. Qui, di nuovo, lo studente cerca di spiegare il suo pensiero, ma ancora una volta il risultato è un testo di difficile interpretazione.

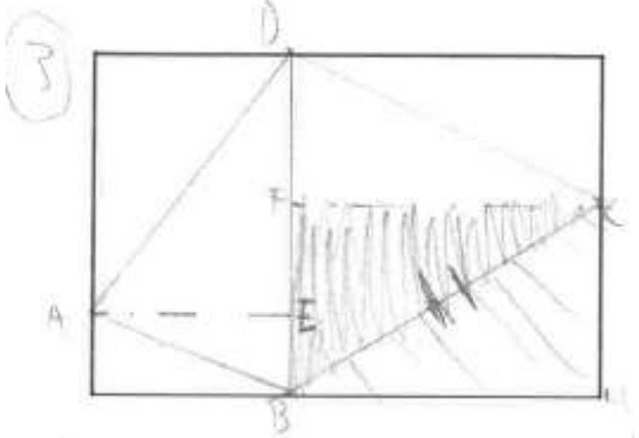


Figura 8 - Figura relativa al testo sotto riportato.

Guardiamo, per esempio la figura 3 (si veda Figura 8). Prima abbiamo detto che una retta deve passare per due punti. ... funziona perché se si traccia l'altezza, si sempre che il triangolo da cui siamo partiti si divide in due triangoli rettangoli, la cui ipotenusa è la diagonale del rettangolo ottenuto dalla suddivisione (F, B, H, C).

Qui lo studente ad un certo punto riporta i puntini di sospensione per non dover scrivere un testo troppo lungo, cosa che invece non lo preoccupa nella dimostrazione guidata che riscrive durante la seconda attività. Il suo comunque, rispetto a quello di molti altri compagni, è già un buon punto di partenza. Riportiamo ora la giustificazione fornita dallo studente al problema verifica.

Sappiamo che ABC e ABD sono due triangoli isosceli (Figura 9) *perché* *i lati AC e CB hanno la stessa lunghezza e, di conseguenza, l'angolo sul punto A e*

quello sul punto B sono uguali. Sappiamo inoltre che la somma degli angoli di un triangolo è 180°. L'equazione per trovare l'angolo Δ *del triangolo ABC è* $\alpha + 2\Delta = 180°$*, che diventa* $40° + 2\Delta = 180°$*;* $2\Delta = 180-40$*;* $\Delta = 70°$*.*
Osserviamo che l'angolo del punto B ha un'ampiezza di 180°, quindi $180° - \Delta = n$*;* $180° - 70° = 110°$*. Si applica poi l'equazione svolta in precedenza per trovare l'angolo β, dato che è un triangolo isoscele e quindi una coppia di angoli ha la stessa ampiezza:* $\omega + 2\beta = 180°$*;* $2\beta/2 = 180°–110°\ 2$*;* $\beta = 35°$*.*

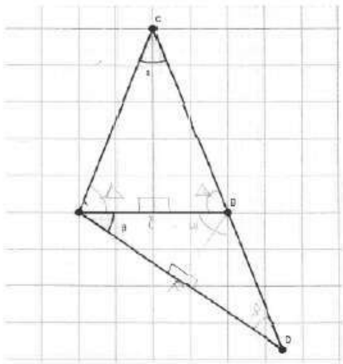


Figura 9 - Immagine alla quale lo studente fa riferimento nella sua dimostrazione.

Possiamo vedere come, a differenza delle risposte sopra esposte e relative alla prima attività, la terminologia utilizzata sia molto migliorata, anche se permangono alcune imprecisioni. Lo studente ad esempio continua a parlare di "*angolo del punto*". Osserviamo che questa espressione è utilizzata da più di un alunno della classe. Inoltre nella prima fase parla di triangolo isoscele dicendo che lo è perché "*i lati AC e CB hanno la stessa lunghezza*". In realtà è nelle ipotesi del problema. Si nota qui come il ragazzo confonda la definizione con una proprietà. Interessante anche che lo studente sia andato ad introdurre una nuova lettera per indicare l'angolo che sta calcolando. Questo denota una maggiore consapevolezza nella necessità di avere un modo univoco per riferirsi ad un oggetto che ritiene di dover richiamare più volte all'interno della dimostrazione. A differenza delle risposte relative alla prima scheda, questo testo è scritto in modo molto chiaro e i passaggi sono tutti motivati, le frasi sono molto scorrevoli e ben strutturate.

Riferimenti bibliografici

ANTONINI S., BACCAGLINI-FRANK A., 2015, Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", Vol. 38/A-B, n°3.

MARIOTTI M. A., 1998, Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", Vol. 21/B n°3.

SOLDANO C., 2016, Learning with the logic of inquiry. A game-approach within DGE to improve geometric thinking, Tesi di dottorato di Ricerca in Matematica, Università degli Studi di Torino.

ZATTARA M., 2019, Dall'indagine alla scrittura argomentativa attraverso i sistemi di geometria dinamica, Tesi di laurea magistrale in matematica, Università degli Studi di Trento.

ARITMETICA IN PROSPETTIVA ALGEBRICA: EFFICACI STRUMENTI DI LAVORO

Elisabetta BRUNO[1], Maria PICCIONE[2], Francesca RICCI[3]
[1] I.C. 1 "A. Salvetti", Colle di Val d'Elsa (SI)
[3]Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Siena (SI)

Riassunto

Il presente lavoro intende promuovere una riflessione su due questioni fondamentali per lo sviluppo del pensiero aritmetico-algebrico, attraverso la presentazione di particolari strumenti didattici utilizzabili fin dall'inizio del percorso scolare. Tali questioni meritano considerazione, essendo ad esse riconducibili, in gran parte, le difficoltà che gli studenti incontrano e la disaffezione che maturano nel tempo verso la Matematica. La prima riguarda un aspetto generale della disciplina: la necessità della rappresentazione simbolica dei suoi "oggetti", ovvero, l'introduzione e l'uso di un linguaggio specifico. Sul piano didattico, essa richiede cura nella costruzione del senso dei segni e delle scritture. La seconda riguarda, invece, un aspetto più settoriale: le caratteristiche strutturali dell'Aritmetica in vista di un naturale "radicamento" dell'Algebra in continuità. Questa richiede un contenimento degli elementi procedurali, tipicamente legati al calcolo.

Introduzione

Dagli anni '90, l'insegnamento/apprendimento dell'Aritmetica e dell'Algebra è uno dei temi centrali della ricerca in Didattica della Matematica. L'attenzione verso questo ambito aveva preso avvio dall'intento di fronteggiare le difficoltà che gli studenti incontrano nello studio della Matematica e della conseguente disaffezione che sviluppano nei confronti di questa materia. Numerose indagini, infatti, avevano evidenziato una relazione tra l'insorgere di tali problemi (diffusi a livello mondiale) e la trattazione di tipici argomenti aritmetico-algebrici: numeri decimali, frazioni, algoritmi di calcolo, numeri negativi, razionali, calcolo letterale, funzioni, ...

Nel tempo, è stata compiuta un'analisi vasta e puntuale degli ostacoli didattici che ha permesso anche di stabilire la fondamentale corrispondenza tra questi e quelli di carattere epistemologico. Gli studi hanno concretamente condotto alla produzione di un ricco materiale teorico e pratico che è auspicabile influenzi, sempre più, la concezione della Matematica (sia come corpo di conoscenze che come strumento educativo), le scelte metodologiche e le attività scolastiche.

La proposta che presentiamo qui mira a portare l'attenzione su un problema basilare che riguarda specificatamente la Matematica, disciplina diversa da tutte le altre per la natura degli "oggetti" di cui si occupa e per i procedimenti che la loro trattazione implica. Tali "oggetti", infatti, sono entità astratte che sfuggono alla percezione sensoriale: hanno origine dall'esperienza senso-motoria operata con oggetti e in situazioni della realtà fisica, che si trasforma in immagini mentali, dalle quali infine emergono come puri "concetti", mediante un processo di astrazione. Come si può interagire dunque con questi "oggetti" invisibili e intangibili? Solo attraverso le loro rappresentazioni simboliche, ovvero solo attraverso i **segni** (simboli) che culturalmente sono stati scelti a rappresentarli, ad "incarnare" il loro **significato**. I segni, nel loro complesso, portano all'introduzione e all'uso di un **linguaggio** specifico, della cui

- effettiva esistenza,
- particolare natura,
- specifico ruolo,

gli studenti non sviluppano un'adeguata consapevolezza.

Ecco come e perché, questo particolare problema epistemologico diventa uno dei più rilevanti problemi didattici che richiama alla cura del processo di costruzione del **senso dei segni e delle**

scritture. Sottolineiamo infine che, quando questo è carente, l'applicazione delle procedure di calcolo viene percepita, e di fatto è, un'attività essenzialmente manipolatoria.

Cenni al contesto teorico

Lo sviluppo del senso dei segni, delle scritture e delle procedure rappresenta l'obiettivo centrale dell'attività proposta. Esso si colloca nella cornice teorica generale del cosiddetto *apprendimento significativo*, un costrutto elaborato dallo psicologo cognitivista D.P. Ausubel (1968), assorbito e sviluppato dalle correnti socio-costruttiviste degli anni seguenti. L'aggettivo "significativo" esplicita la caratteristica distintiva di questo tipo di apprendimento, nel quale un oggetto della conoscenza risulta effettivamente appreso solo se ne viene elaborato il significato. Precisamente, acquisire un concetto/procedimento **è** conquistare il significato di quell'oggetto/procedimento attraverso un'azione guidata che conduce il soggetto a far convergere i "significati psicologici" elaborati individualmente con i "significati logici" del sapere istituzionale. Aggiungiamo che, in questa interpretazione, il processo di interiorizzazione è il prodotto di quattro componenti: *cognitiva, emotiva, psicomotoria, metacognitiva*, ovvero richiede il coinvolgimento armonioso di "pensiero" "sentimento" e "azione" del soggetto nella personale interazione con l'ambiente (insegnante, compagni, materiali, aula,...).

Al polo opposto delle forme di conoscenza, sta l'*apprendimento meccanico* nel quale gli oggetti della conoscenza sono, invece, semplicemente accumulati. Per inciso, altrettanto distanti risultano gli esiti sul piano della memorizzazione: stabile e agevole, nel primo caso, temporanea e difficile, in quest'ultimo.

Ma resta da precisare l'aspetto che ci riguarda espressamente, ovvero rispondere alla domanda: <come emerge il significato di un oggetto/procedimento matematico?>

In estrema sintesi, i concetti "chiave" necessari per fornire la risposta sono due: *struttura concettuale* e *relazioni.* Il significato di un oggetto/procedimento emerge dal sistema di relazioni che lo collega ad altri di un determinato ambito. Si realizza un apprendimento significativo quando il soggetto stabilisce tali legami con consapevolezza.

Questa caratteristica "relazionale" della conoscenza compare ulteriormente teorizzata da R.R.Skemp in un lavoro divenuto un caposaldo per la didattica della Matematica (1976). Utilizzando le denominazioni introdotte dall'autore, la *conoscenza relazionale* centra l'attenzione sugli aspetti strutturali e relazionali della disciplina e si contrappone alla *conoscenza strumentale* (o *procedurale*) che porta l'attenzione sugli aspetti algoritmici (manipolazione di segni, applicazione di regole di calcolo) e molto spesso induce il fenomeno della "sospensione del giudizio"[1]. Di conseguenza, nell'una, la capacità di *interpretazione* dei segni e delle scritture si contrappone a quella di *manipolazione* richiesta dall'altra. Un esempio elementare che permette di evidenziare la distinzione tra i due tipi di conoscenza è dato dalle diverse interpretazioni possibili della formula dell'area di un rettangolo, $A = a \cdot b$:

da un lato, può essere compresa come legame tra estensioni di dimensione diversa (superficiale e lineare) riguardante una certa figura geometrica;

dall'altro, come puro comando per calcolare l'area noti i lati di una certa figura.

Nel primo caso, inoltre, la padronanza del senso dell'uguaglianza che sussiste tra fattori e prodotto di una moltiplicazione, non rende necessaria la memorizzazione delle "formule inverse", come accade invece nel secondo caso, qualora si voglia determinare la lunghezza di un lato note l'area e la lunghezza dell'altro lato.

Il **potenziamento della conoscenza relazionale** rispetto a quella procedurale costituisce il primo dei due principi teorici ai quali si conforma la proposta che presentiamo qui.

[1] L'espressione concerne l'adattamento da parte di un soggetto all'uso di una procedura di calcolo o di trasformazione di una formula, avendo la consapevolezza di non sapere perché essa si possa/debba applicare. Esempi tipici sono le regole delle operazioni tra numeri relativi, quelle tra numeri razionali, l'elevamento a potenza con esponente negativo o frazionario.

Il secondo principio, di carattere più strettamente disciplinare, riguarda l'interpretazione della **conoscenza algebrica come evoluzione della conoscenza aritmetica**. Questo, peraltro, rimanda al precedente: infatti, per "radicare" significativamente l'Algebra nell'Aritmetica (in accordo con lo sviluppo storico di questi due campi del sapere) è necessario focalizzare gli aspetti strutturali dell'Aritmetica e limitare gli elementi procedurali, tipicamente legati al calcolo.

L'"Early Algebra Approach": una nuova concezione

Il presupposto didattico su cui poggia l'"Early Algebra Approach" è ben sintetizzato dalla seguente citazione:

I modelli mentali propri del pensiero algebrico possano essere costruiti sin dall'inizio della scuola primaria, parallelamente a quelli dell'aritmetica, insegnando l'aritmetica "algebricamente" (N. Malara, 1994)

Al contrario, la situazione che si osserva comunemente nella prassi corrente, è quella della <u>separazione fra le due aree aritmetica-algebrica</u>. Essa riguarda non solo la <u>collocazione</u> degli argomenti in determinati periodi del percorso scolastico, resa necessaria dagli stadi dello sviluppo cognitivo (Tab. 1); ma, con "danno" maggiore, l'<u>interpretazione</u> e la mancanza di collegamenti tra gli oggetti dell'una e dell'altra area, lungo il percorso.

Disciplina Livello scolastico	aritmetica	algebra
primaria	numeri naturali, numeri decimali, frazioni,…	uso delle lettere nelle formule in geometria
secondaria di I grado	ampliamenti degli insiemi numerici: numeri interi, razionali, reali particolari come π, √2	uso delle lettere in formule, espressioni, equazioni e funzioni
secondaria di II grado	introduzione dei numeri reali e complessi	sviluppo dell'algebra simbolica

Tabella 1 – Distribuzione dei temi disciplinari nei diversi livelli scolari

Il superamento della separazione richiede, da un lato, di trattare l'aritmetica in prospettiva algebrica enfatizzando la relazione tra numeri e operazioni elementari, anche attraverso il ricorso a scritture complesse (espressioni aritmetiche) e, dall'altro, di introdurre l'algebra come evoluzione dell'aritmetica focalizzando l'attenzione sugli aspetti della rappresentazione simbolica (introducendo le lettere).

La scelta metodologica che promuove l'insegnamento dell'aritmetica in prospettiva algebrica sin dai primi anni della Scuola primaria, e addirittura di quella dell'infanzia, si colloca all'interno della cornice teorica denominata ***Early Algebra.***

Questo approccio prende avvio negli anni '90 dallo studio degli ostacoli cognitivi per lo sviluppo del pensiero algebrico e dalla individuazione del contesto aritmetico come luogo della loro origine. Le difficoltà risultano, infatti, emergere negli ambiti didattici dove l'attività prevalente è indirizzata allo sviluppo delle abilità di calcolo piuttosto che a quello dei significati degli oggetti e dei processi matematici.

L'approccio integra, come mostra l'elenco che segue, principi discussi sopra e si configura dunque come una declinazione delle teorie citate per il settore aritmetico-algebrico:

- concezione dell'aritmetica come linguaggio;

- costruzione dei significati, ovvero, anticipazione della semantica alla sintassi (come avviene nell'apprendimento del linguaggio naturale);
- sviluppo del pensiero relazionale rispetto a quello procedurale;
- interiorizzazione graduale dell'idea di variabile , incognita, equivalenza,... .

Strumenti didattici
Gli strumenti che presenteremo nel seguito sono in gran parte tratti dal Progetto ArAl. Il loro uso didattico è in grado di sostenere efficacemente lo sviluppo di conoscenze essenziali nella costruzione del pensiero aritmetico-algebrico. In particolare, essi intervengono in campi fondamentali della concettualizzazione, favorendo lo sviluppo di:

- consapevolezza della necessità della rappresentazione simbolica degli oggetti matematici e della sua non univocità
- comprensione della struttura di un numero in relazione alle *operazioni elementari*
- possibilità dell'uso di simboli non numerici (lettere) per la rappresentazione di numeri
- capacità di verbalizzazione ed argomentazione

I strumento: *la piramide dei numeri*[2].
La *piramide dei numeri* è uno strumento tanto semplice quanto potente nell'ambito dei processi della rappresentazione numerica.
Le attività che si possono svolgere con tale strumento spostano nettamente l'attenzione dai tecnicismi del calcolo finalizzati alla determinazione del "quanto fa" alla individuazione delle relazioni che sussistono tra numeri e operazioni (fatto che caratterizza l'aspetto algebrico!).
Una piramide è una struttura a più piani realizzata avvicinando e sovrapponendo in modo opportuno un certo numero di "mattoni" che si prestano ad esporre sulla faccia anteriore simboli o scritture numeriche legate da regole.
E' bene costruire concretamente strutture di questo genere – ad esempio con scatole uguali – prima di giungere alla rappresentazione grafica sotto indicata che costituisce l'effettivo strumento di mediazione semiotica da utilizzare nell'attività (Fig. 1).

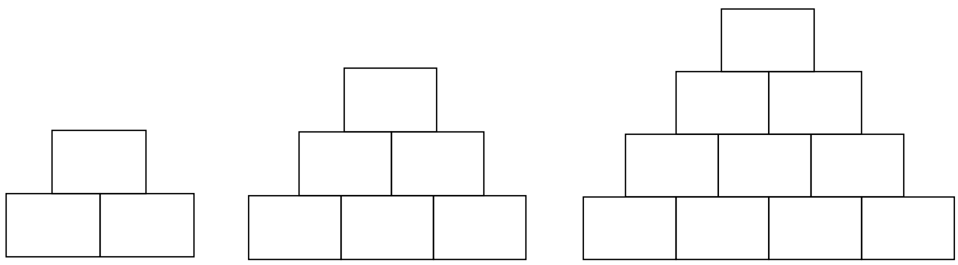


Figura 1 – Rappresentazione grafica delle piramidi dei primi tre ordini.

Il lavoro, adatto ad una prima classe di Scuola primaria, inizia introducendo il primo elemento della serie − detto *minipiramide* – e proponendo il gioco ***Scopri la regola delle minipiramidi*** dall'osservazione di esempi proposti (Fig. 2).

[2] cfr. Unità 5. Collana Progetto ArAl

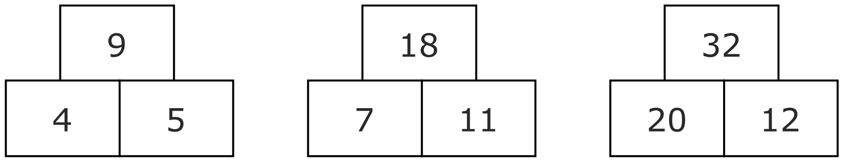


Figura 2 – Esempi per il gioco della scoperta della regola.

Le risposte dei ragazzi vengono raccordate dall'insegnante verso un'adeguata formulazione della regola nel linguaggio naturale, ad esempio:
"*il numero che compare nel mattone in alto è la somma dei numeri che compaiono nei mattoni in basso".*
Si procede con la traduzione nel linguaggio matematico e la trascrizione della regola nei mattoni in alto. (Fig. 3).

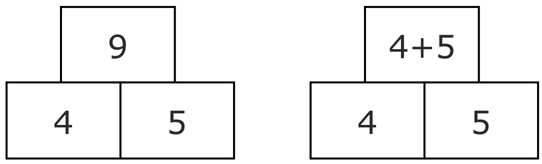


Figura 3 – Esempio di trascrizione della regola.

Un altro gioco interessante è ***Completa la minipiramide***, che richiede l'individuazione di tutte le coppie additive di un numero. Il gioco offre un'occasione per discutere su un modo ordinato per ottenere tutte le possibili coppie. Per inciso, osserviamo che il "procedere con ordine" sviluppa una forma importante della mente matematica che possiamo definire "combinatoria". Nel caso specifico, la sistematicità della ricerca può richiedere di partire dal numero 0 e procedere nella successione naturale fino al 12 (Fig. 4):
"*Con quale numero può combinarsi lo 0 per ottenere 12?*"; "*Con quale numero può combinarsi l'1 per ottenere 12?*" e così via. (Fig. 4).

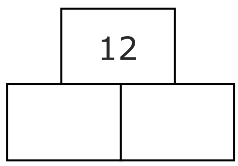


Figura 4 – Esempio di minipiramide da completare.

Un passaggio cruciale del processo di costruzione del **senso delle lettere** è fornito dalle attività che fanno intervenire un numero nascosto, e quindi sconosciuto, da descrivere operativamente rispetto al contesto presentato, come in ***Descrivi la situazione con un numero nascosto***. Rammentiamo che l'obbiettivo è <u>stabilire relazioni</u> piuttosto che <u>determinare risultati</u>. La "macchia" che copre il numero può/deve intervenire nella scrittura simbolica che traduce la situazione nel linguaggio matematico. La Fig. 5 presenta un semplice caso con affiancate traduzioni simboliche.

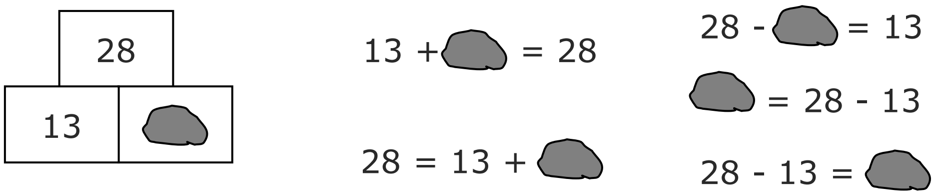


Figura 5 – Quantità rappresentate da simboli non numerici.

Gradualmente si conducono i bambini a sostituire la macchia con un segno o una lettera nelle traduzioni. Ad esempio: **"?"**; **"m"** iniziale della parola "macchia"; **"n"** iniziale della parola "numero", …).

La portata concettuale di un simile lavoro è rilevante: costituisce un primo approccio all'uso di **simboli non numerici**, ciascuno dei quali rappresenta un **numero non conosciuto che <u>può essere determinato</u>**, ovvero ha il significato di ***incognita***.

Non si pensi di dover denominare il simbolo introdotto: si tratta solo di cominciare ad associarlo ad una nuova entità (molto particolare!).

Proseguendo lungo questo percorso, risultano assai significative altre attività del tipo ***Completa la piramide.*** Per esempio, la situazione problematica mostrata in Fig. 6 richiede l'introduzione di un simbolo (giungendo ad usare una lettera...) per rappresentare il numero di una casella vuota e di esprimere i numeri delle altre caselle vuote in funzione di esso. La formalizzazione conduce ad una uguaglianza (*equazione*) che permette di trovare il numero sconosciuto (*soluzione*): un vero incontro "algebrico"!

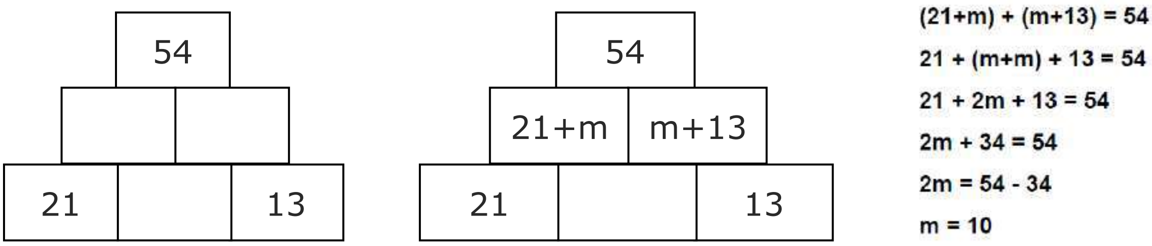


Figura 6 – Introduzione di un simbolo non numerico con valore di incognita.

Altri esempi, che si collocano ad un livello di maggiore complessità formale rispetto al caso precedente, favoriscono ulteriori fondamentali concettualizzazioni.

Il caso che segue (Fig.7) propone ancora un approccio a simboli non numerici, ma… aventi significato diverso!!!

Il completamento della piramide a tre piani, con due soli numeri dati, comporta l'uso di un simbolo per indicare il numero di una casella vuota in funzione del quale potranno essere scritti i numeri delle altre caselle vuote: il simbolo non numerico rappresenta un **"numero qualunque" che <u>non può essere determinato</u>**, cioè ha il significato di ***variabile*** (***parametro***).

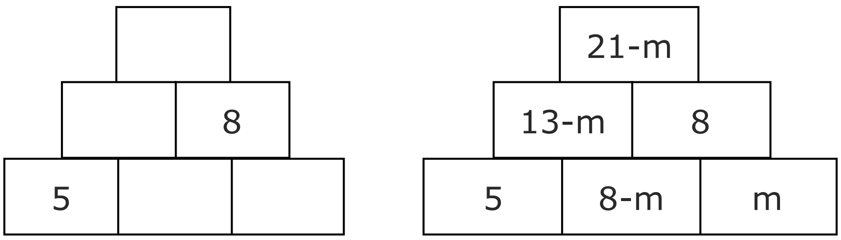


Figura 7 – Introduzione di un simbolo non numerico con valore di variabile.

Il passo conclusivo di questo percorso si compie con la richiesta ***Riempi la piramide vuota***. Notiamo che la natura del problema cambia solo nella forma e non nella sostanza: il cambiamento sta solo nel passaggio dai casi particolari al caso generale. Conviene suggerire di cominciare dal riempimento del primo piano con lettere che rappresentano numeri e quindi possono essere trattate come numeri! Questa attività porta ad esplicitare tutto il sistema delle relazioni esistenti tra gli elementi di una piramide e di dare senso alle prime espressioni algebriche:
piramide a due piani: due lettere alla base, per es. **a** e **b** → **a + b,** alla sommità;
piramide a tre piani: tre lettere alla base, per es. **a, b, c** → **a + 2b + c,** alla sommità;
piramide a quattro piani: quattro lettere alla base, per es. **a, b, c, d** → **a + 3b + 3c + d,** alla sommità.
Proseguite voi, con piramidi sempre più alte!
Naturalmente ciascuna lettera gioca il ruolo di variabile.

II strumento: *la griglia dei numeri*[3].
La griglia dei numeri è una tabella quadrata numerata da 0 a 99 progressivamente lungo le righe.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 8 – La griglia dei numeri.

La "griglia" è uno strumento in grado di agire in sinergia con la "piramide" sia verso la comprensione della grande varietà di rappresentazioni possibili di uno stesso numero mediante combinazioni elementari di altri, che nell'avvio all'uso delle lettere.
L'attività iniziale ***Esplora la griglia e scopri le relazioni fra i suoi numeri*** ha il duplice obiettivo di analizzare la distribuzione dei numeri lungo le righe e le colonne della griglia e, successivamente, di individuare ed esplicitare le *regole operative* che sono associate al passaggio da una casella ad un'altra. Per questo, risulta utile far lavorare i bambini su una porzione quadrata come ad esempio il quadrato 2x2 contenente i numeri: 27, 28, 37, 38.
Si scoprono così le regole operative locali; poi, si verifica che le relazioni esistenti nel frammento minimo sono sempre le stesse al variare della posizione: una mascherina quadrata da spostare sulla griglia aiuta a "vedere" questa proprietà. Fare un "passo" da una casella ad un'altra contigua, corrisponde ad agire sul numero della casella di partenza aggiungendo o

[3] cfr. Unità 4. Collana Progetto ArAl

togliendo unità. Si può convenire con i bambini di chiamare “valore del passo” ciascuna di queste “azioni”[4]; si giunge a concludere che esse sono, in tutto, otto distinte:

- ***+1** verso destra; **-1** verso sinistra*
- ***+10** verso il basso; **-10** verso l’alto*
- ***-11** in alto a sinistra; **+11** in basso a destra*
- ***+9** in basso a sinistra; **-9** in alto a destra*

Quindi si prova a descrivere la situazione attraverso un grafo che evidenzia tutti i passi possibili su un frammento (Fig. 9)

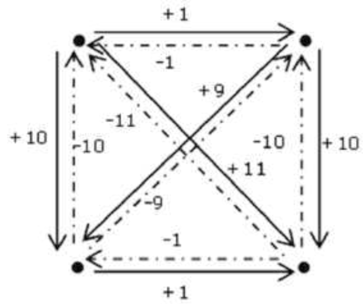


Figura 9 – Il valore dei passi su un frammento.

Le tipiche attività sulla griglia fanno intervenire il concetto di *percorso* tra due caselle, ovvero un cammino (senza salti e senza uscire dalla griglia) che attraversa un certo numero di caselle. Si scopre che ci sono:

- percorsi diretti - ciascuno disposto secondo una delle quattro direzioni principali (orizzontale, verticale, diagonali) e orientati in uno dei due versi possibili,
- percorsi minimi,
- percorsi lunghi e contorti...

Un esempio di consegna è ***Disegna un percorso e traducilo nel linguaggio simbolico***.
Di seguito, sono descritti tre percorsi dal 23 al 79:

- $23 + (10 \times 5) + (1 \times 6) = 23 + 10 \times 5 + 1 \times 6 = 23 + 50 + 6$
- $23 + 1 \times 6 + 10 \times 5 = 23 + 6 + 50$
- $23 + 11 \times 5 + 1 = 23 + 55 + 1$

Un altro gioco è ***La caccia al tesoro***, avente una notevole portata sul piano cognitivo, poiché richiede non solo un lavoro di codifica di un percorso (come nel caso precedente), ma anche di decodifica di una espressione aritmetica. La Fig. 10 mostra due percorsi corrispondenti: l’uno, <u>codificato aritmeticamente</u> e l’altro, <u>rappresentato geometricamente</u> che conduce dalla “casella-approdo (6)” alla “casella-del-tesoro (63)”.

[4] In termini rigorosi, ogni “azione” è un operatore unario; ma nel contesto considerato si può accettare l’uso dell’espressione “valore del passo”.

$$\boxed{6 - 1 + 9 \times 2 + 10 \times 3 = 63}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 10 – Rappresentazioni aritmetica e geometrica di un percorso

Come anticipato, le potenzialità didattiche di questo strumento sono notevoli per lo sviluppo del *senso della rappresentazione* e avviano ad introdurre l'uso delle lettere in luogo di numeri. Come strumento didattico si può usare una porzione connessa della griglia, che chiamiamo *frammento*. Il primo gioco, ***Completa il frammento con i numeri mancanti***, richiede solo di applicare le regole operative associate agli spostamenti sulla griglia (Fig. 11)

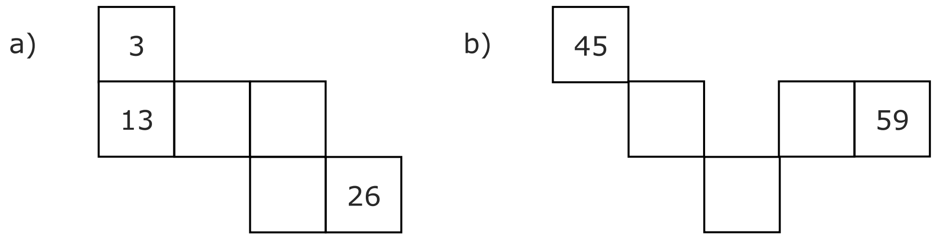


Figura 11 – Un frammento da completare.

Ma il lavoro diventa concettualmente rilevante se la richiesta è
Completa il frammento rappresentando i numeri mancanti in relazione a quello dato, come nell'esempio (Fig. 12) o addirittura ***Riempi il frammento vuoto.*** In questo caso, si può suggerire di partire dal rappresentare il numero di una casella con una lettera e descrivere quindi gli altri <u>in funzione</u> di questo.

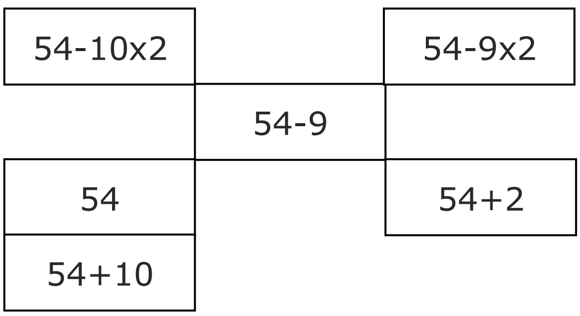


Figura 12 – Frammento da completare.

III strumento: ***il quadrato magico.***

Un *quadrato magico nxn* è uno schieramento di numeri interi, distribuiti nelle caselle di una tabella quadrata suddivisa in n righe e in n colonne, che soddisfa le seguenti condizioni:

- i numeri siano tutti distinti tra loro
- la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna, e in entrambe le diagonali, sia la stessa.

Il numero *n* è detto *ordine* del quadrato.

La somma costante è detta *costante magica* o *chiave* del quadrato.

Segue subito dalla definizione che per riempire un quadrato di ordine *n* sono necessari n^2 numeri. In particolare, se i numeri dello schieramento sono gli interi da 1 a n^2, il quadrato è detto "perfetto" o "normale".

Il *quadrato magico* è uno strumento che offre significative situazioni di apprendimento nel confronto con simboli e scritture del linguaggio matematico. Evidenziamo le potenzialità che si collegano specificatamente agli obiettivi del presente lavoro:

- rivisitazione del ruolo delle cifre indo-arabiche nel sistema della numerazione posizionale-decimale;
- sviluppo della consapevolezza del "potere" delle lettere.

Le attività che descriveremo nel seguito fanno riferimento a quadrati magici perfetti. Si collocano a livelli di concettualizzazione diversi tra loro, più evoluti dei casi trattati finora, rispondenti nell'ordine, ai due punti evidenziati sopra.

Il primo passo – comune alle due attività – consiste nella presentazione della seguente tabella quadrata 3x3 (Fig. 13).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 13 – Quadrato magico di ordine 3.

Si invitano i ragazzi a studiarne la struttura, ovvero a rilevarne le proprietà. L'osservazione potrà essere sostenuta da domande-guida che condurranno a scoprire le sorprendenti caratteristiche:

- la tabella contiene tutti i numeri da 1 a 9, senza salti ne' ripetizioni;
- la somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e delle due diagonali è sempre uguale a 15!

Per prendere confidenza con questa famiglia di oggetti, si possono mostrare quadrati magici di ordine maggiore di 3.

Trova la somma magica conoscendo l'ordine del quadrato è un bel problema, più semplice di quel che appare: basta immaginare di mettere insieme tutte le unità dei numeri contenuti nel quadrato e quindi di distribuirle in parti uguali lungo le righe (o le colonne).

Nel caso del quadrato di ordine 3, si trova:

(1+2+3+4+5+6+7+8+9) : 3 = 45 : 3 = 15, come si era già osservato!

In generale, si dovrà trovare la somma dei primi n^2 numeri e poi dividere per n. Cioè:

$(1+2+3+\ldots+n^2) : n$.

Omettiamo qui la trasformazione di questa scrittura in una più semplice e utile (che si ottiene applicando la formula della somma dei primi k numeri).

Proponiamo quindi il gioco intrigante ***Decifra questo curioso quadrato magico*** (Fig. 14).

Figura 14 – Quadrato magico di ordine 6 da decifrare.

Tenendo conto che le "figurine" rappresentano cifre indo-arabiche e che il quadrato presentato è magico, i ragazzi devono scoprire la corrispondenza figurina – cifra, per ogni figurina.
Il gioco è impegnativo. Diamo qualche suggerimento. Intanto, il quadrato contiene i numeri da 1 a 36. La soluzione è notevolmente aiutata dall'analisi delle ricorrenze delle dieci cifre, ovvero delle volte in cui ogni cifra compare nel "ruolo" di unità o in quello di decine, nell'insieme considerato. Possiamo riprendere la griglia dei numeri e considerare il frammento da 1 a 36. La Tab. 2 riassume tali ricorrenze.

cifre ricorrenze	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
ruolo unità	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**
ruolo decina	**0**	**10**	**10**	**7**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabella 2 – Trascrizione delle ricorrenze delle dieci cifre nei due ruoli.

È necessario, inoltre, tenere conto della costante magica che "fissa" la somma dei numeri di ogni riga e di ogni colonna e che nel caso del quadrato magico di ordine 4 è:
$(1+2+3+ \cdots +36) : 6 = 666 : 6 = 111$
Il gioco obbliga ad utilizzare l'algoritmo della addizione e tenere conto del sistema della rappresentazione numerica (provate!).

Descriviamo la seconda attività[5].
Si inizia col gioco ***Completa il quadrato in modo che sia magico.***
È opportuno presentare sia casi risolubili (Fig. 15a) che non risolubili (Fig. 15b).

[5] L'attività fa riferimento all'uso del quadrato magico introdotto dal matematico A. Arcavi nella sua celebre indagine sul "*symbol sense*" posseduto dagli studenti in specifici contesti di *problem solving*.

	3	
8		1

	3	8
2		

Figura 15 – Quadrati magici di ordine 3 da completare.

La presenza di un quadrato di ordine 3 che i ragazzi non riescono a completare, pone un problema che rispecchia in pieno lo “spirito matematico”, ovvero invita alla ricerca di una condizione per la “magicità”.
Andiamo dunque ***Alla scoperta della condizione della “magicità”***.
È importante lasciar discutere i ragazzi sulle vie di soluzione. Le situazioni in cui il problema è stato posto mostrano che i ragazzi non tendono spontaneamente a pensare ai simboli letterali (con ruolo di variabili) come strumenti capaci di svelare la struttura di un quadrato magico 3x3. Può essere dunque opportuno sollecitarne l’uso con una domanda del tipo:
“Le lettere potrebbero aiutarci?”.
Si mettono dunque tre lettere (a, b, c) nelle caselle a rappresentare numeri qualunque e si procede a descrivere gli altri in funzione di questi e della somma magica che, come sappiamo, è 15! Le abilità di rappresentazione e trasformazione algebrica acquisite nel percorso precedente sostengono lo svolgimento del lavoro. Per passi successivi, si giunge a riempire le caselle con le espressioni della Fig. 16.
Per illustrare le operazioni effettuate, è necessario nominare le caselle: lo faremo adottando la modalità tipica con la quale un posto è identificato − nell’ordine − dal numero della riga e da quello della colonna a cui appartiene.
Tre caselle si riempiono immediatamente:
la (**1-1**): **15-b-c**;
la (**1-3**): **15-a-b**;
la (**3-2**): **15-a-c**.
Le altre richiedono qualche trasformazione:
la **(1-2)**: **15 - (15-a-c) - b = a+c-b**
la **(2-1): 15 - (15-b-c) - a = b+c-a**
la **(2-3)**: **15 - (15-a-b) - c = a+b-c**

Ma si scopre che la casella **(2-3)**, per esempio, si può esprimere anche come:
15 - (b+c-a) - b = 15 - 2b - c + a
Allora abbiamo trovato due rappresentazioni dello stesso numero! che pertanto possono essere uguagliate: **15 - 2b - c + a** = **a + b – c**
E, trasformando questa equazione, si giunge a: **15 = 3b** ovvero **b = 15:3 = 5**

Abbiamo trovato la condizione della magicità: il numero della casella centrale <u>deve essere 5</u>!

15-b-c	**a+c-b**	**15-a-b**
b+c-a	**b**	**a+b-c**
a	**15-a-c**	**c**

Figura 16 – Condizioni di magicità.

Il "potere" delle lettere risalta appieno! E il "senso del simbolo" si sviluppa di conseguenza…

Conclusione

Desideriamo chiudere questo contributo con una semplice, ma incisiva citazione:

Sarà anche possibile far sì che le persone apprendano ciò che noi vogliamo,
ma in futuro ricorderanno ed useranno solo ciò che ha acquisito un senso per loro.
(D. D. Jonassen)

APPENDICE

Osservazioni da una sperimentazione (conduzione di Elisabetta Bruno).

Nel corrente anno scolastico, la "griglia dei numeri" è stata oggetto di sperimentazione[6] in una classe prima dell'I.C. 1 "A. Salvetti", di Colle di Val d'Elsa (SI).
La classe è composta da 25 alunni, tra i quali 2 DSA e 2 BES.
Il percorso – suddiviso in quattro fasi – si è svolto tra ottobre e novembre, in circa 8 ore.

Per il lavoro, gli alunni utilizzano piccole griglie individuali, e fanno riferimento anche a griglie proiettate su uno schermo per condividere osservazioni, discussioni, esempi.

1ª Fase

1.a) Esplorazione della griglia 0-99

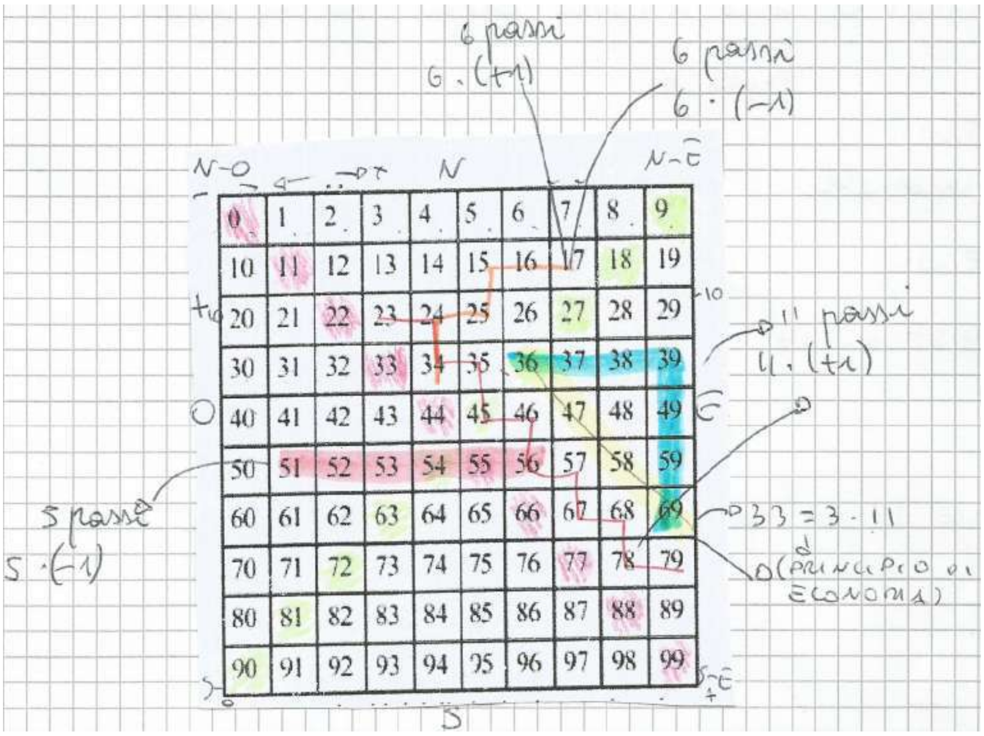


Figura 1 – Esplorazione della griglia

Dall'analisi della griglia, emergono concetti di notevole importanza e varia natura:

- concetti geometrici: *direzione* e *verso*;
- metodi rappresentativi di un insieme di elementi: *schieramento tabulare* in righe e colonne;
- concetti della teoria degli insiemi: *operazione* e *operatore*;
- elementi simbolici: rappresentazione di operatori unari.

L'attività ha permesso di osservare che ogni direzione ha due versi, e correggere l'espressione linguistica usata dai ragazzi "*Ogni linea ha due direzioni*".

---

6 Attività sperimentale collegata al I e II Corso di Formazione **"Riflessioni sull'educazione del pensiero aritmetico-algebrico nella scuola dell'obbligo. *Incontri di studio per un approccio al progetto ArAl*"** organizzato dal Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche nell'ambito del PLS (A.A. 2018-'19 e 2019-'20).

Il passaggio da una casella ad un'altra contigua, chiamato *passo* è istintivamente rappresentato con una *freccia* dagli allievi; la rappresentazione sagittale delle operazioni associate agli spostamenti ha stimolato la riflessione sulle operazioni e le loro inverse (Fig. 1).

1.b) Rappresentazione delle regolarità con un grafo

Dopo aver disegnato alla lavagna il *grafo* degli spostamenti, corrispondente ad una porzione qualunque 2x2 della griglia, si inseriscono i codici +1 e -1 che indicano il "valore" del passo, e si chiede ai bambini:

Completa il grafo copiato alla lavagna inserendo il valore del passo su ogni freccia (Fig. 2).

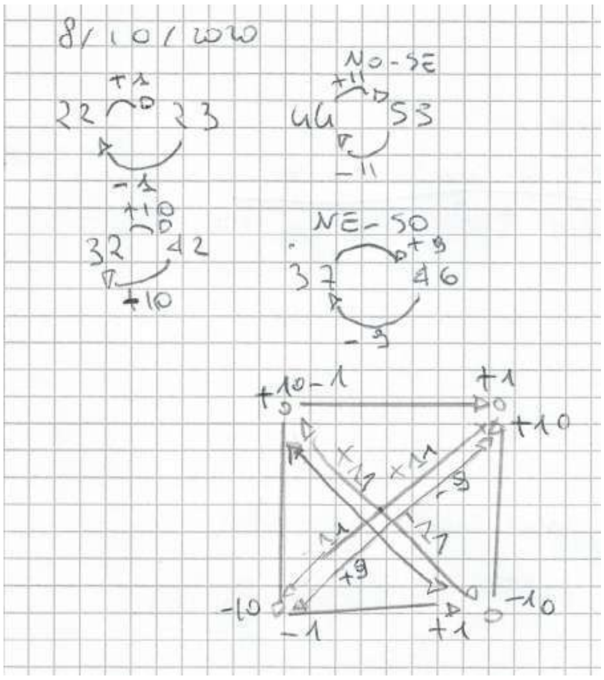


Figura 2 – Attribuzione dei valori ai passi

2ª Fase

2.a) <u>Percorsi diretti</u> sulla griglia da una casella a un'altra

Si propongono percorsi diretti (in orizzontale, verticale e diagonale) sulla griglia e si chiede di descriverli, via via liberandosi dei riferimenti tipici del linguaggio naturale e incoraggiando l'uso del linguaggio matematico per la scrittura di catene di operazioni. Questa attività potenzia il calcolo mentale.

Con gli allievi condividiamo il significato di ***percorso*** e lo visualizziamo come un *cammino* fatto di *passi* attraverso le celle*;* un ***passo*** è lo spostamento da una cella ad una ad essa "collegata" e lo rappresentiamo con un segmento orientato (vettore). Si rende necessario chiarire, con esempi espliciti, che due celle sono collegate tra loro se hanno un lato o un vertice in comune. Le celle collegate per un vertice (cioè lungo una diagonale) non vengono riconosciute tali in modo spontaneo dai bambini, come mostra l'espressione usata: "*toccarsi per la punta non è essere attaccati!*".

Si manifesta una seria difficoltà da trattare con attenzione: quale ruolo svolge la cella di partenza?

<u>Primo fatto</u>. <u>La cella di partenza non è un passo, bensì una posizione</u>.

Per dare un messaggio senso-motorio della differenza, può essere utile proporre un gioco di movimento su uno "schema a caselle", contrassegnate da simboli qualunque, tracciato sul pavimento. Nello svolgimento del gioco, si chiede di descrivere ad alta voce le varie azioni:

"***sono su** la casella* " "***salto su** la casella* ".
La differenza è rimarcata dai due stati diversi del corpo: che sta fermo (essere sulla casella/stare sulla casella), o si muove (saltare da una casella a un'altra).
Secondo fatto. La cella di partenza contiene un numero.
Il numero contrassegna la cella.
Si apre la discussione: *La cella di partenza deve essere contata nei passi?*
No, non deve essere contata nei passi (non è un passo!)
Il numero in essa contenuto entra nel gioco del calcolo, come quantità di partenza alla quale aggiungere o togliere le quantità corrispondenti ai passi del cammino effettuato nello spostamento che porta alla cella di arrivo.
Richiamiamo l'analogia con la retta dei numeri, riflettendo sulla distinzione tra *soste* e *passi*:

- ogni *sosta* corrisponde ad un punto contrassegnato da un numero;
- ogni *passo* corrisponde ad un segmento sulla retta dei numeri.

Il numero associato al punto indica quanti passi si compiono a partire dal punto-0 per raggiungerlo. Di conseguenza, i passi sono uno in meno delle soste (lo scarto è dovuto alla sosta-origine).
Lavorando sulla griglia, concordiamo di marcare il riquadro della cella di partenza.

2.b) Percorsi indiretti sulla griglia per passare da una casella a un'altra.
Si scelgono le caselle 23 di partenza e 79 di arrivo; si chiede di indicare percorsi che portano da 23 a 79 e di scrivere le catene di operazioni ad essi corrispondenti (Fig. 3).

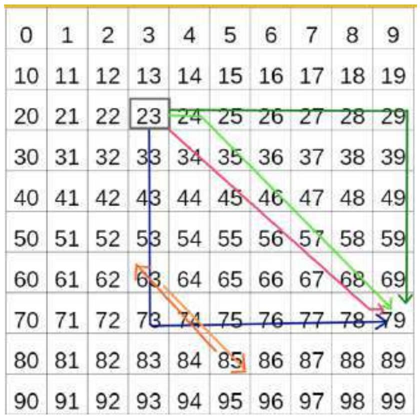


Figura 3 - Esempi di percorsi diretti e indiretti

Si rappresentano sulla griglia i percorsi relativi ad alcune proposte dei ragazzi, enfatizzando la possibilità di ottenere il 79 a partire dal 23 in tanti modi diversi. È opportuno soffermarsi su alcune trascrizioni algebriche di percorsi; per esempio:
percorso verde chiaro: $23 + 1 + 11 \cdot 5$
percorso blu: $23 + 10 \cdot 5 + 1 \cdot 5$
e guidare i bambini alla scoperta della loro equivalenza:
$23 + 1 + 11 \cdot 5 = 23 + 10 \cdot 5 + 1 \cdot 5$
Altre rappresentazioni permettono di riflettere su alcune proprietà delle operazioni:
percorso verde scuro: $23 + 1 \cdot 5 + 10 \cdot 5$
percorso blu: $23 + 10 \cdot 5 + 1 \cdot 5$
L'equivalenza tra le due rappresentazioni evidenzia la proprietà commutativa dell'addizione tra i numeri 5 e 15 dell'esempio riportato:
$1 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \;=\; 10 \cdot 5 + 1 \cdot 5$
La reazione di molti bambini è di stupore o incredulità. Ciò evidenzia che l'equivalenza tra

processi è più difficile da accettare di quella tra *prodotti,* come l'esperienza comune tra gli insegnanti conferma.
La griglia è uno strumento potente per la rappresentazione non canonica di un numero (rappresentazioni diverse sintatticamente, ma uguali semanticamente).
Infine, riflettiamo sui "percorsi economici": non tutti concordano sulla convenienza dello *scrivere meno*, i "forti" nel calcolo sono al contrario stimolati a proporre lunghe espressioni.

2.c) <u>Percorsi inversi</u> sulla griglia tra due caselle

Il lavoro proposto in classe e a casa, in autonomia, consiste nel rappresentare le catene di operazioni che permettono di passare da una casella ad un'altra e viceversa, per esempio: *Traccia il percorso 63-85 e il suo inverso e scrivi le catene di operazioni corrispondenti* (Fig. 3).
Si rilevano i seguenti errori che ricorrono negli elaborati degli allievi (Fig. 4):

- scrittura di false uguaglianze in successione
- trascrizione di un'operazione alla volta
- omissione dei numeri di partenza e di arrivo
- difficoltà di produrre l'espressione completa

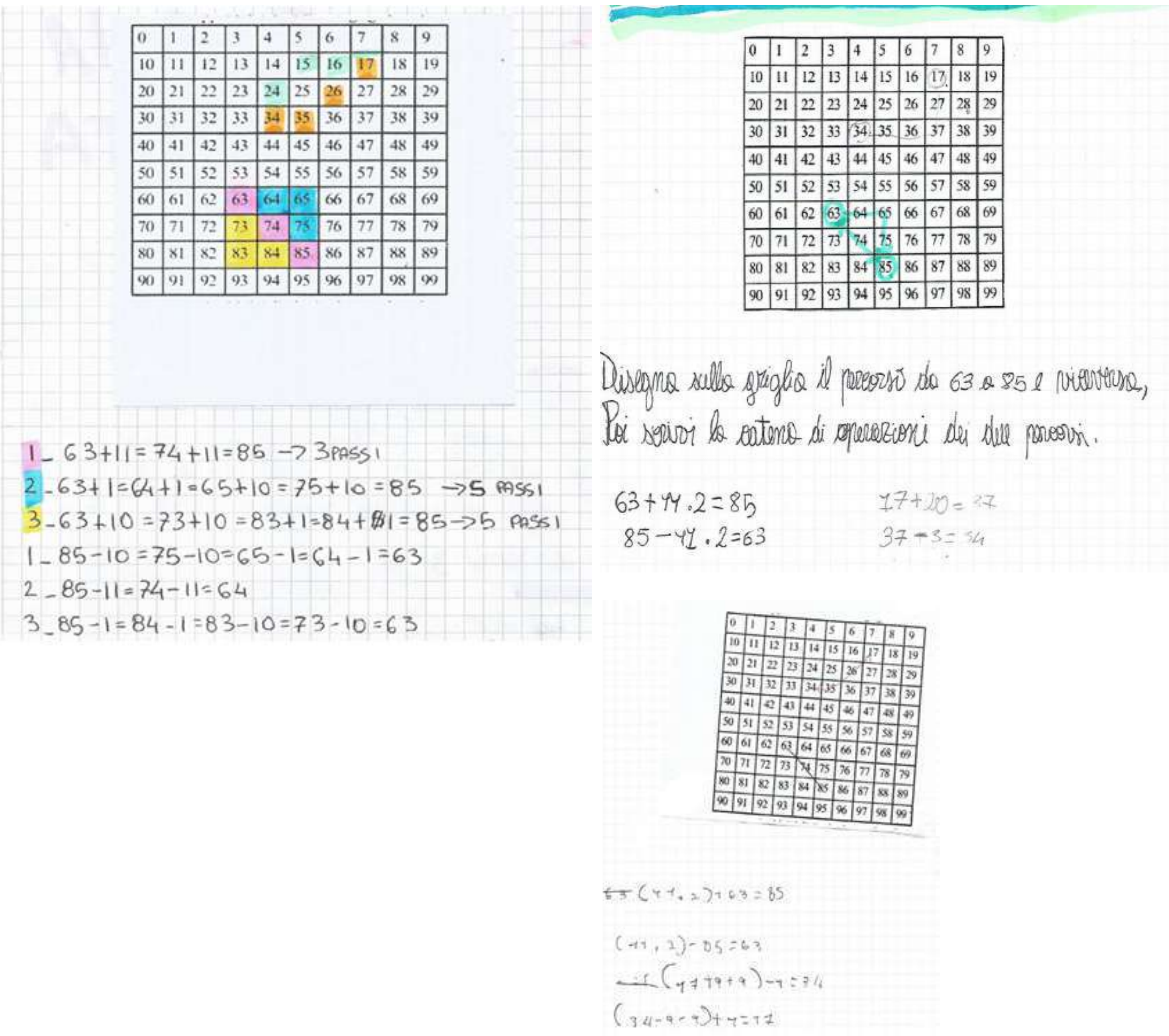


Figura 4 - Elaborati degli allievi

3ª Fase

La griglia vuota
Proponiamo un nuovo problema: Inserisci *il numero 36 e argomenta la strategia per individuare la sua posizione. Poi scrivi la catena delle operazioni corrispondenti al percorso mentale.*
Quest'attività richiede di ricostruire le regolarità della griglia in modo immaginativo. In vari casi, la capacità argomentativa è limitata, come ad esempio nella risposta: "*L'ho collocato lì ...*".

Gioco della Caccia al tesoro (individuale)
Sulla griglia contenente solo 0 e 99 viene proposta la seguente attività da svolgere individualmente:
Sei il pirata, fissa l'approdo nella cella 19 e nascondi il tesoro (T) nella cella 71.
Ora fai la mappa per ritrovarlo: rappresenta il percorso che conduce da 19 a T sulla griglia con le frecce; poi scrivi la catena delle operazioni.

Il lavoro, nella generalità dei casi, viene svolto in modo coerente e corretto, non richiedendo suggerimenti (Fig. 5a); talvolta non viene seguito un criterio di economicità (Fig. 5b). L'elaborato in Fig. 5c mostra un difetto di comprensione dello strumento: l'allievo riesce a tracciare il percorso con l'aiuto dei numeri nelle celle, ma produce una successione di addizioni errata. Di nuovo, diffusamente, le difficoltà si manifestano nell'argomentazione nel linguaggio naturale.

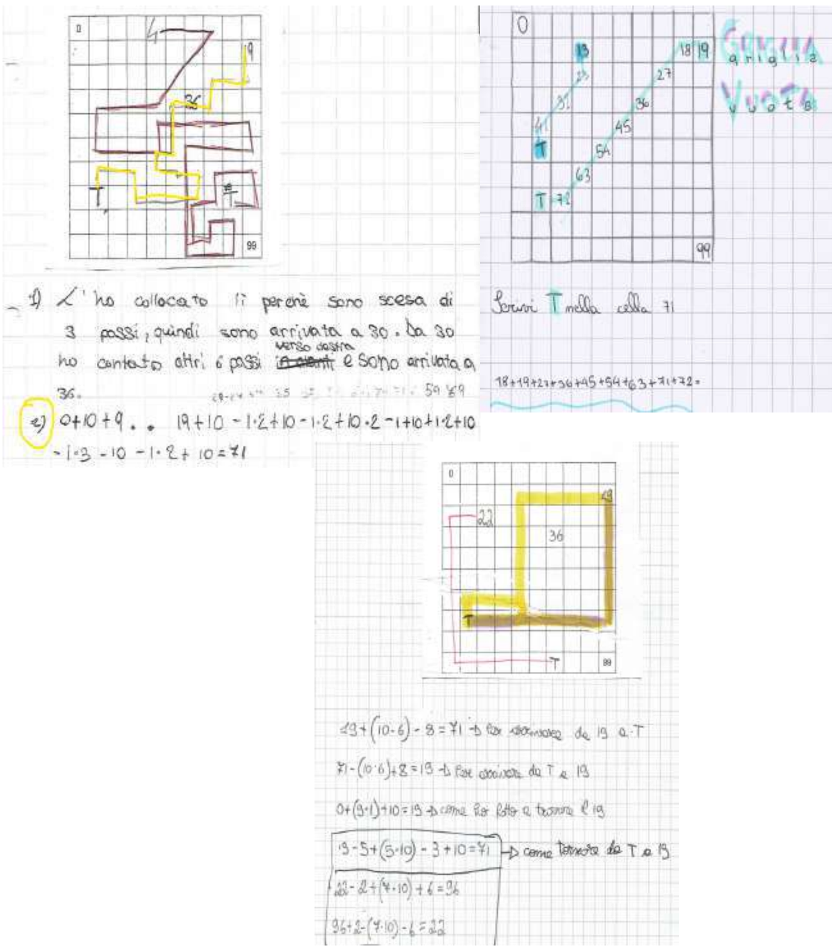


Figura 5 - Elaborati degli allievi

Gioco della Caccia al tesoro (a coppie)

Questo gioco è una variante di quello precedente, di livello di difficoltà maggiore per l'uso della griglia completamente vuota. È stato attuato in modo da consentire ai ragazzi di lavorare in modo collaborativo (nonostante le limitazioni dovute alle norme della emergenza sanitaria): ogni alunno invia il codice aritmetico (la catena di operazioni) della mappa al compagno del banco posteriore (e l'ultimo al primo della fila). Il compagno ricevente traccia sulla griglia il percorso. Il compagno mittente conferma se il ricevente ha saputo trovare il Tesoro.

È un'attività di autoverifica della correttezza dell'interpretazione del messaggio.

Le restituzioni del lavoro mostrano una certa varietà di livelli di competenza nel passaggio tra registri di rappresentazione diversi, sia nel processo di decodifica delle scritture aritmetiche che in quello di codifica richiesto dalla traduzione nel linguaggio geometrico (Fig. 6).

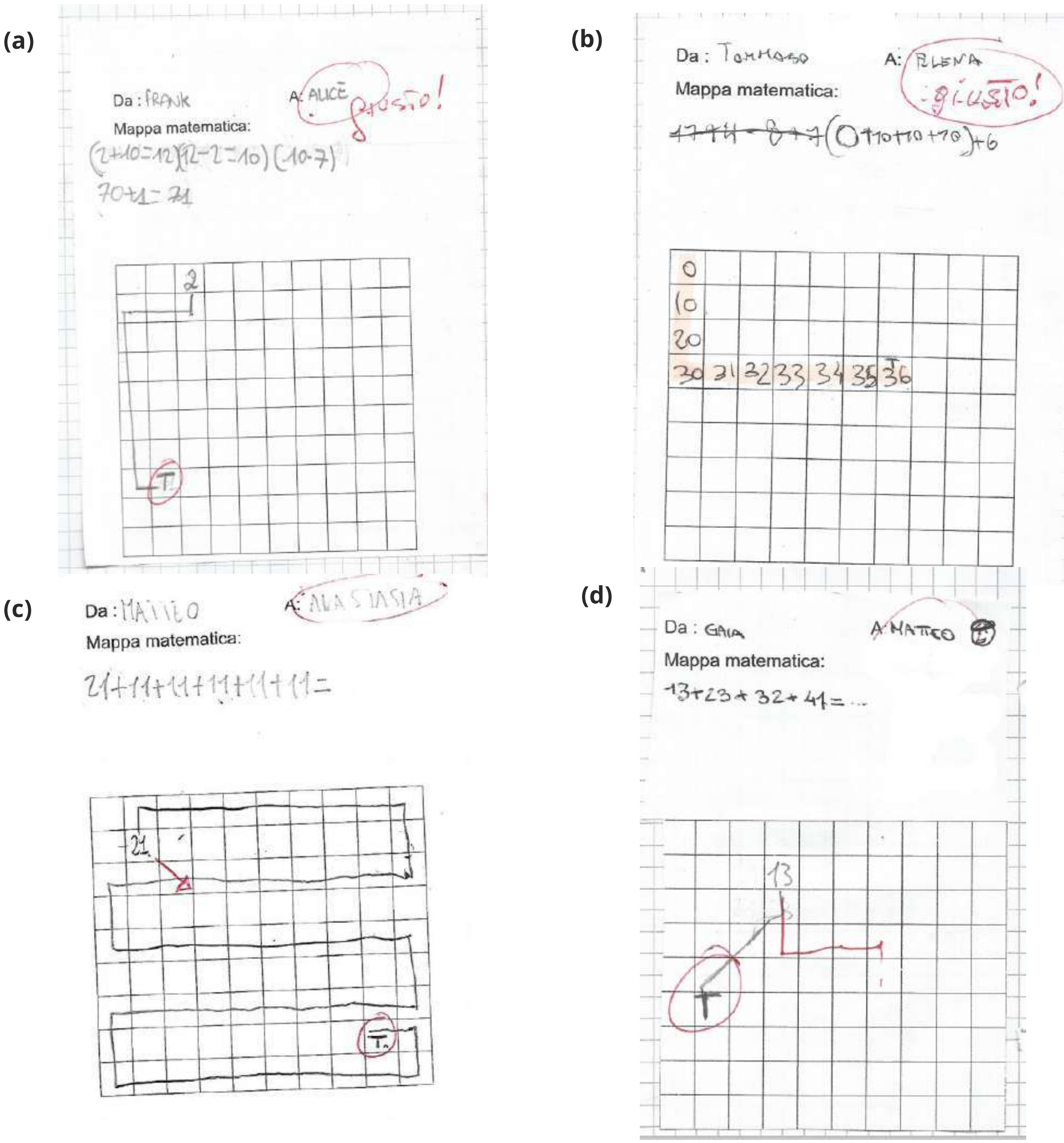
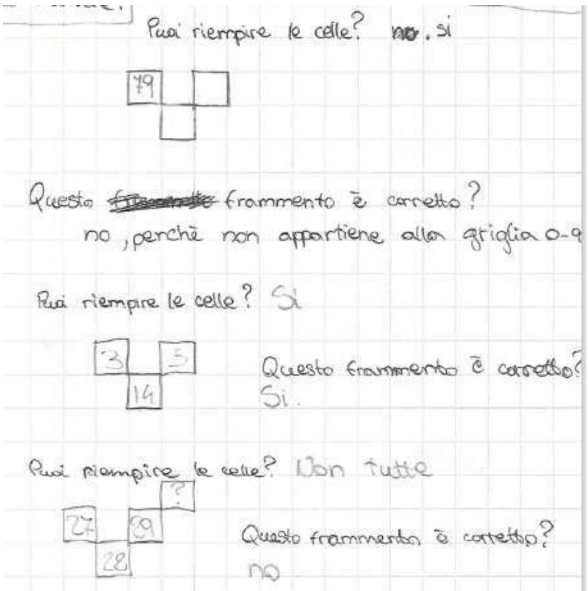


Figura 6 a-b-c-d - Elaborati degli allievi

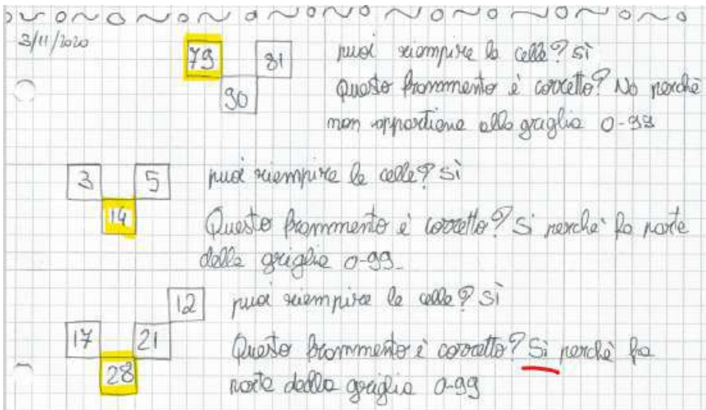
(a) decodifica l'espressione contenente la successione di uguali (comprende il linguaggio errato usato del compagno)
(b) decodifica il codice aritmetico; mantiene il controllo della procedura scrivendo nelle celle i numeri che corrispondono ai risultati parziali dell'espressione
(c) non decodifica il codice della mappa
(d) riceve dalla compagna una mappa matematica che coinvolge la successione di celle attraversate dal percorso (ma non ne è la traduzione aritmetica); non verifica l'incoerenza della catena di operazioni ricevuta (che darebbe come risultato 109), la interpreta e traccia il percorso prolungandolo, erroneamente, di una casella.

4ª Fase

Attività con frammenti di griglia
In questa fase si propongono agli alunni frammenti di griglia; per il disegno, si è scelto di utilizzare il foglio quadrettato del quaderno; un livello di maggiore difficoltà consiste nel proporre i frammenti su foglio bianco. Gli allievi vengono invitati a completarli scrivendo i numeri nelle caselle vuote; l'attività comprende anche l'individuazione di frammenti che non appartengono alla griglia 0-99 (Fig. 7a).
È un'attività efficace per consolidare la conoscenza dello strumento. Nel complesso, l'esperienza ha focalizzato la necessità di dedicare maggior tempo alla fase di esplorazione (1ª fase); in questa sperimentazione, era stata ritenuta una conquista cognitiva facilmente realizzabile da ragazzi di prima media; al contrario, le restituzioni di molti hanno smentito l'ipotesi.



(a)



(b)

Figura 7 - Elaborati degli allievi

Un'ulteriore attività è il completamento di frammenti in funzione di un numero (nell'esempio riportato, 16).
È un'attività che promuove efficacemente il pensiero relazionale, e inoltre, propedeutica alla rappresentazione delle relazioni aritmetiche che intercorrono tra gli elementi di un frammento in una interpretazione generale, che farà intervenire l'uso delle lettere in luogo dei numeri, come nel caso riportato in Fig. 8 e Fig. 9.

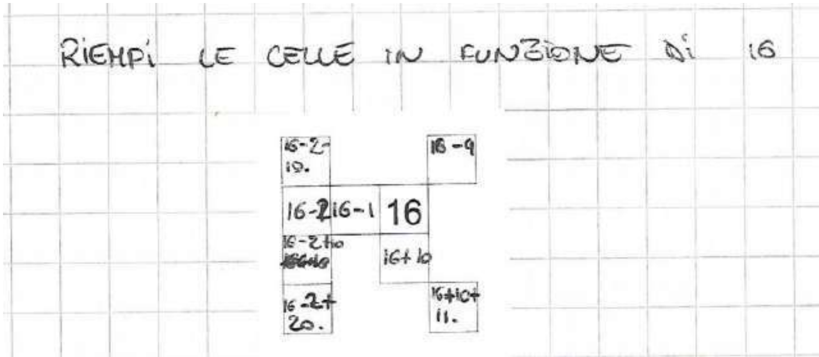


Figura 8 - Frammento riempito correttamente

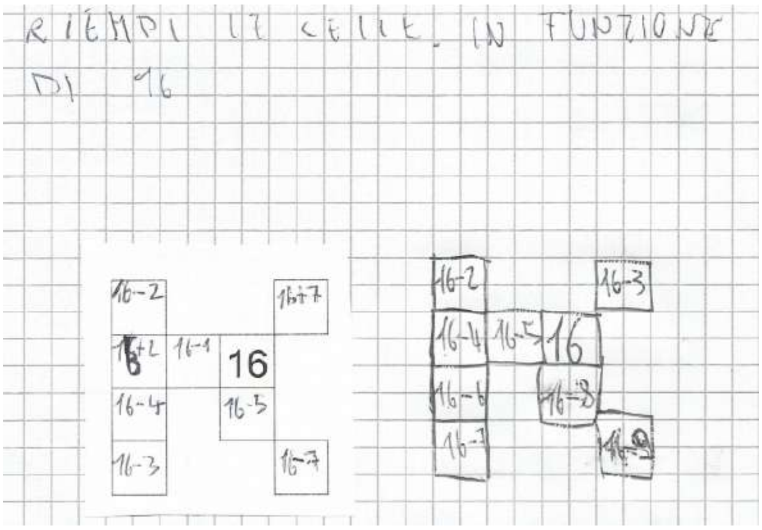


Figura 9 - Il frammento di sinistra viene corretto in classe nel frammento di destra

Riferimenti bibliografici

ARCAVI A., 1994, Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics, 'For the Learning of Mathematics' 14, 3, Vancouver: FLM Publishing Association, pp. 24-35.

AUSUBEL D. P., 1978, Educazione e processi cognitivi: guida psicologica per gli insegnanti [Educational Psicology. A cognitive view, Holt, Rinearth and Winston, Inc., New York, 1968], D. COSTAMAGNA (Ed.), Milano: Franco Angeli.

SKEMP, R. R., 1976. Relational understanding and instrumental understanding, 'Mathematics Teaching', 77, pp. 20-26.

MALARA N. A., 1994, Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, Atti del Convegno Nazionale "Dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica", Castel S.Pietro (BO)

MALARA N. A., NAVARRA G., 2003, Quadro teorico di riferimento e glossario, Collana Progetto ArAl, Bologna: Pitagora.

GIACOMIN A., NAVARRA G., 2003, Unità 5. Le piramidi dei numeri, Collana Progetto ArAl, Bologna: Pitagora.

GIACOMIN A., NAVARRA G., 2003, Unità 4. Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri, Collana Progetto ArAl, Bologna: Pitagora.

Composizione tipografica dei testi a cura di Chiara Cateni

http:/ / www.grimed.net
e-mail: segreteria@grimed.net

ISBN 978-88-945774-1-9