Quaderni GRIMeD

n°4

FARE MATEMATICA IN RELAZIONE

a cura di

Chiara Cateni, Cristina Fattori, Roberto Imperiale,
Brunetto Piochi, Francesca Ricci, Adele Maria Veste

ISBN 9791220029582

Composizione grafica e tipografica dei testi a cura di Chiara Cateni

http:/ / www.grimed.net
e-mail: grimed2@gmail.com

Sezione Poster

Seminario Siena 2017

PUNTO. E ACCAPO.

Roberto IMPERIALE
Presidente Nazionale GRIMeD
Università di Torino

Riassunto

Dopo un'ampia premessa, si cercherà di analizzare, il più oggettivamente possibile, la situazione della scuola italiana, e si proporranno soluzioni per eliminare le sue criticità più evidenti affinché la scuola stessa continui ad essere – o torni ad essere – ciò che s'immagina e si spera che sia: il luogo della democrazia, dove si favorisca lo sviluppo e il consolidamento della cittadinanza e dell'autonomia personale e sociale di ogni ragazzo, non uno di meno; e le generazioni possano riconciliarsi tra loro, e confermare una scelta assoluta, quella di abitare un umanesimo globale o, in altre parole, "un neo-umanesimo "di razza contadina".

Da sempre mi ha drammaticamente interrogato quel che una volta ebbe a dire il capo indiano Tatanga Mani, alias Bufalo che Cammina, degli Indiani Stoney: "Vi è molto di folle nella vostra cosiddetta civiltà. Come pazzi voi uomini bianchi correte dietro al denaro, fino a che non ne avete così tanto, che non potete vivere abbastanza a lungo per spenderlo. Voi saccheggiate i boschi e la terra, sprecate i combustibili naturali, come se dopo di voi non venisse più alcuna generazione, che ha altrettanto bisogno di tutto questo. Voi parlate sempre di un mondo migliore mentre costruite bombe sempre più potenti per distruggere quel mondo che ora avete". Lo userò come epigrafe di quel che sto per dire.
È ormai ineludibile la necessità di fare il punto sullo stato della scuola del nostro paese, senza nessun condizionamento, men che mai ideologico, ma anche senza nessuna riserva. Parlarne è assumersi la stessa responsabilità che il bambino innocentemente si prese quando denunciò la nudità del re; e deriva dalla scelta di appartenere.
Chi sceglie di appartenere sa che questa nobilissima condizione dell'uomo è determinata dalla libertà e comporta necessariamente la libertà, comunque declinata; non solo, quindi, la libertà di giudizio ma anche la libertà dei comportamenti. Tuttavia, la "scelta di parte" non esclude, anzi: enfatizza il valore delle differenze, declinate in un quadro di uguaglianza sostanziale; e ne consente i confronti, le negoziazioni e perfino le assimilazioni e i meticciamenti, soprattutto se sostenuti da quella condizione del cuore e della mente – in verità spesso vituperata - detta "onestà intellettuale". In definitiva, gli unici costrutti tra loro assolutamente inconciliabili sono "l'appartenenza" e "il pensiero unico". Sembra un paradosso, ma non lo è.
Non ho "disaffezione" patetica al nostro tempo, anzi: ho difeso la scienza da ogni attacco dogmatico e confliggo con forza contro ogni posizione antiscientifica. Non sono iscritto alla classe degli apocalittici né a quella degli integrati. Non sono un luddista, né un passatista o un futurista. Cerco invece di praticare costantemente "il metodo della progettazione", che, come mirabilmente scrive Lucio Lombardo Radice è "l'abitudine a dedurre, ad estrapolare, ad anticipare a partire da ciò che è, ciò che noi vogliamo sia nel futuro. Si tratta della dimensione che possiamo chiamare "filosofica", "utopica" più correttamente e concretamente: politica, e che è caratteristica dell'uomo. L'uomo vive con le radici nel passato e la fantasia nel futuro" (Lombardo Radice, 1976). Questo dovrebbe fare ognuno di noi, in particolare se è uomo di scuola. Cercherò dunque di parlare del presente, per provare a immaginare ipotesi sul futuro. Il futuro che è già cominciato. Proprio ora.

Da tempo – ormai - la nostra scuola è in uno stato di assoluta sofferenza. La pesantissima burocratizzazione che l'ha di tempo in tempo investita – a dispetto delle dichiarazioni di principio – ha definitivamente cancellato le speranze che essa potesse essere davvero non "un servizio" ma "al servizio" dello Stato, dotata di autonomia propria, nel rispetto della Costituzione sebbene pesantemente e – a mio parere – negativamente modificata. Dalla c.d legge Bassanini in avanti (la n° 59/1997) – che paradossalmente introduceva l'autonomia, ma non esattamente quella che avevamo a lungo sognato e auspicato e per la quale avevamo anche rumorosamente manifestato - la scuola si è definitivamente trasformata in un servizio e, quindi, in un'azienda: e, si sa, i servizi: la luce, il gas, i trasporti … costano, e dunque si pagano! Dice nulla "l'obbligatorio contributo volontario" che ogni genitore versa all'atto dell'iscrizione e che spesso serve a comprare carta diversamente impiegabile?
Dalla bozza di riforma di un celebre ministro dell'Istruzione (poi modificata, per ovvie ragioni, una delle quali coincidente col cognome di colui) che progettava una scuola tanto "democratica" da consentire di fare giardinaggio a chi avrebbe voluto farne e lettere ai letterandi, guidata non più da un preside o da un direttore didattico ma da un dirigente (quantunque improprio) fino a quella del "coding" e dell'"economic literacy"[1], vi è stata un'ordalia di costanti e pervicaci progressioni verso l'obbiettivo attraverso sequele di leggi" dagli estensori chiamate "riforme" (ma da molti di noi, "controriforme"). Qual era e qual è ancora oggi lo scopo, per altro già strutturalmente raggiunto nei fatti? Mettere la scuola sul mercato, mercificarla, cambiarne la natura facendola diventare non soggetto di trasformazione ma trasformazione in oggetto acquistabile. E i saperi, in merce di scambio. Che senso avrebbero, se no, l'"open day", le scuole competitive, gli scaffali pieni di progetti a un tanto al chilo e la torta di mamma per il "finale tarallucci e vino"? E che senso avrebbe, se no, l'attualissima "alternanza scuola-lavoro", sulle cui modalità di realizzazione – compreso qualche aspetto di sfruttamento del lavoro minorile – avrei moltissimo da dire? E, infine, che senso avrebbero i "crediti" e i "debiti"?
Nel lessico familiare di me ragazzo/studente i crediti erano: "hai fatto metà del tuo dovere" (frase che ansiosamente mi costringeva a cercare – quasi sempre invano - l'altra metà); e i "debiti" erano, quando andava bene, silenziose occhiate; e, se andava male, erano: "se non studi andrai a comunanza", termine che la felice memoria di mio padre – che non aveva potuto studiare ma che conosceva la poesia, la musica, la matematica, la geometria e quant'altro sapere almeno quanto me (e che di Paolo e Francesca, Farinata, Ulisse, Ugolino e di altre stupefacenti narrazioni mi sfidava a ricordarne le vicende, - a memoria, ovviamente!) – usava per indicare la pastorizia.
Per mio padre studiare non era solo il "poter prendere il celebre ascensore sociale"; era provare il piacere della scoperta della straordinaria avventura dell'uomo, della quale anche lui reclamava il diritto di far parte; ma di più era la chiara consapevolezza che "lottare senza istruzione vuol dire essere sempre umiliati e battuti" come mirabilmente scriveva Giuseppe Di Vittorio, maestro della libertà, al quale, nel suo sessantesimo compleanno, il sindacato ferrovieri aveva regalato un orologio su cui era inciso: "otto ore per lavorare, otto ore per riposare, otto ore per istruirsi". "La scuola per tutti" di Di Vittorio era la scuola della cittadinanza. Semplicemente quella. Per questo e solo per questo, io, che per le mie attonite lentezze sarei stato un "disperso" se non m'avessero spinto a studiare le burbere dolcezze di mio padre e la silenziosa condivisione di mia madre, i cui nomi sono fiero d'aver portato "più in là dell'odio e dell'invidia", continuavo ad esplorare il mondo e le sue storie. Ma non mi piaceva quando mi interrogavano!
La scuola di oggi si è definitivamente piegata agli ordini dell'economia e del denaro. Oggi si va a scuola sostanzialmente per sperare di imparare a far soldi, magari tramite "neoimpresa".

[1] Si veda ad es, la Circolare del MIUR, avente per oggetto "Educazione economica - offerta formativa 2015/2016."

Non sapete cos'è o non conoscete questo termine italiano? E se prima vi avessi parlato di "programmazione informatica" o di "alfabetizzazione economica", avreste subito collegato questi termini con "coding" e con "economic literacy" così come "neoimpresa" si collega con "startup"? Forse sì, visto che i termini appartengono a quella lingua povera e opaca diventata, per imperialismo economico-culturale, "la lingua". Cioè l'inglese.
Così si è definitivamente realizzato il progetto di chi pensava che la scuola dovesse essere la scuola delle "tre i". Fortunatamente – però - la Corte Costituzionale e il Consiglio di Stato di questo strampalato Paese esistono ancora.
Per continuare, tuttavia e anticipando un pezzo di ragionamento, dico che i saperi, ancora parcellizzati e gerarchizzati dalla tristissima eredità crociano-gentiliana e che andrebbero invece "riunificati" attraverso un "approccio storico-genetico" *[che è]* uno dei metodi universali che si applicano ad ogni ricerca" (Lombardo Radice, cit.) - non sono più a disinteressata disposizione del cittadino, ma servizio a pagamento dei presenti e futuri consumatori e delle loro famiglie, trasformati in clienti - o peggio in "customers"; che, com'è noto, hanno sempre ragione e della cui "satisfaction" mi dissero che avrei dovuto occuparmi, almeno da quando - contro la mia volontà – fui trasformato in dirigente scolastico, mettendo di fatto fine al mio impegno didattico e dando contestualmente inizio a quello gestionale; e, com'è a tutti tristemente noto, a quello conflittuale, in particolare coi customers, appunto; quando, ad esempio, qualcuno di essi entrava nell'edificio con l'intenzione di dettare agli insegnanti le ragioni, i tempi e i modi del "fare scuola"; o, peggio, quando entrava per "menare" qualche insegnante reo di lesa maestà, senza nemmeno chiedermi chi menare…(spero sia stata colta l'amara ironia…); o, infine, per provare l'affilatura di un coltello sulla faccia di una professoressa.
Eppure – per tornare ai saperi - già Antonio Gramsci (Gramsci, 1975) ci aveva messo in guardia con parole che hanno il sapore di profezia. Scriveva, infatti: "Nella scuola moderna mi pare stia avvenendo un processo di progressiva degenerazione: la scuola di tipo professionale, cioè preoccupata di un immediato interesse pratico, prende il sopravvento sulla scuola "*formativa*" immediatamente disinteressata. La cosa più paradossale è che questo tipo di scuola appare e viene predicata come "democratica", mentre invece essa è proprio destinata a perpetuare le differenze sociali. Il carattere sociale della scuola è dato dal fatto che ogni strato sociale ha un proprio tipo di scuola destinato a perpetuare in quello strato una determinata funzione tradizionale. Se si vuole spezzare questa trama, occorre dunque non moltiplicare e graduare i tipi di scuola professionale, ma creare un tipo unico di scuola preparatoria (elementare-media) che conduca il giovane fino alla soglia della scelta professionale, formandolo nel frattempo come uomo capace di pensare, di studiare".
Fatte le debite proporzioni, tutto questo coincide con quel che scriveva Aristotele: «Gli uomini hanno cominciato a filosofare, ora come in origine, a causa della meraviglia: mentre da principio restavano meravigliati di fronte alle difficoltà più semplici, in seguito, progredendo a poco a poco, giunsero a porsi problemi sempre maggiori […] Ora, chi prova un senso di dubbio e di meraviglia riconosce di non sapere […]. Cosicché, se gli uomini hanno filosofato per liberarsi dall'ignoranza, è evidente che ricercarono il conoscere solo al fine di sapere e non per conseguire qualche utilità pratica». E, con le solite debite proporzioni, l'indicazione aristotelica rimanda a quel che ci insegnava una grande maestra di matematica e della sua didattica, Emma Castelnuovo. Dopo aver risolto un problema – diceva, parlando ai ragazzi - "vedrete che voi stessi sarete condotti a porvi delle questioni, a pensare degli altri problemi; e il pensare un problema, il porsi delle questioni e dei perché, è ancor più difficile che saperli risolvere, ed è più bello. (Castelnuovo, 1979)
Ecco: continuando sempre a ragionare ad alta voce, ci si rende conto che la scuola unica di Gramsci è – in altre parole - quel che recita l'ancora vigente celebre comma 1. dell'art. 34 della Costituzione della Repubblica Italiana: "la scuola è aperta a tutti", il comma più ovvio per una

democrazia, ma quello non sempre realizzato qui da noi; non perché a scuola non ci vadano tutti o quasi tutti, ma perché essa disperde precocemente – per ragioni le più vare - circa il 13,8% degli studenti (Valore medio della "Dispersione Scolastica" nell'anno 2016 – Fonte MIUR, Ufficio Statistiche e Studi). Le contromosse a questo gravissimo fenomeno - che, per altro, l'Europa vorrebbe attestare intorno al 10% come obbiettivo virtuoso da raggiungere nel 2020 (così si perderebbero virtuosamente solo 10 ragazzi su 100…grazie per la vostra generosità!) – e al netto dei continui tagli all'istruzione (nel 2015 l'Italia ha investito solo il 4% del PIL, contro – ad esempio - il 7,5% dell'Islanda, il 7% della Danimarca, il 6,5% della Svezia e il 6,4% del Belgio (Eurostat, 2017) sono tutte contenute in una sola straordinaria dichiarazione: "la scuola" deve essere "inclusiva", nella quale non si vede o si fa finta di non vedere che l'aggettivo è pleonastico e che, senza scomodare i filosofi, esso riduce per "diminutio" la portata stessa del sostantivo. Oppure, perché qualcuno, recitando un implicito mea culpa nell'esplicitare quella dichiarazione, è effettivamente consapevole del fatto che la nostra scuola non lo sia più, o che accanto, ve ne sia un'altra, più importante per loro, la "esclusiva". Giusta preoccupazione: questa scuola esclusiva esiste ed è la scuola che – secondo l'Istat - consente solo al 10% dei ragazzi provenienti da famiglie a basso reddito di arrivare alla laurea, contro il 60% di chi nasce in famiglie abbienti. "Questo vuol dire anche che nei posti di responsabilità non arrivano i più bravi ma i più fortunati (al netto dei raccomandati). E nello stesso tempo vuol dire che la società italiana coltiva l'ingiustizia della disuguaglianza" (Veladiano, 2018). La cosa risibile, però, è che un numero sempre crescente di addetti ai lavori, chiama "eccellenze" quei fortunati e li colloca – in virtù di misure proprie dell'economia - nell'improbabile categoria dei "meritevoli", di fatto contraddicendo il già citato articolo 34 della Costituzione. Infatti, nel terzo comma di esso c'è scritto: I capaci e meritevoli, anche se privi di mezzi, hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi. Sapete chi sono costoro? Non due distinte categorie di cittadini, "i capaci e i meritevoli", ma le stesse persone: nel testo, la seconda "i" non esiste. I padri costituenti (oggi confermati dagli eccezionali risultati delle neuroscienze) pensavano – correttamente - che tutti i cittadini, quando entrano nella scuola, siano forniti di capacità proprie come una delle caratteristiche della loro unica ed irripetibile identità; e, se la scuola ha fatto il suo dovere, ne escano avendo ciascuno i propri meriti, La scuola che fa il suo dovere realizza l'uguaglianza sostanziale. Quel comma non può che interpretarsi così, a meno che non si voglia ipotizzare – a causa di moderni non esemplari esempi cogenti - che i Costituenti pensassero che tra i cittadini ve ne potesse essere qualcuno "più meritevole" di un altro. Al contrario, quei giganti (ne avesse oggi l'Italia!), avevano creato una barriera contro la disuguaglianza e contro il merito immeritato; e sarebbero assai stupiti di vedere che quella disuguaglianza viene, invece, ancora e di nuovo coltivata, nonostante i tanti maestri che si sono battuti perché così non fosse, i nostri maestri profeti visionari, quelli che nella loro scuola **"**chi era senza basi, lento o svogliato si sentiva il preferito. Veniva accolto come […] il primo della classe. Sembrava che la scuola fosse tutta solo per lui. Finché non aveva capito, gli altri non andavano avanti" (Scuola di Barbiana, 1976).

Questo discorso, com'è evidente, interroga quel modo di essere e di agire detto "l'etica della responsabilità", che secondo Max Weber (in una celebre conferenza tenuta a Monaco il 28 gennaio 1919)[2] esige "che si risponda delle conseguenze prevedibili delle proprie azioni". Con questa tesi concordo, dichiarando ad adiuvandum che la scuola di don Milani - cui accennavo poc'anzi - era esattamente la scuola della responsabilità individuale e sociale, dove si

[2] Ora presente in: WEBER M., 1997, Il lavoro intelletuale come professione, Einaudi,Torino). Max Weber è il pensatore grazie a certi lavori del quale sono contento di essere stato cattolico; e, di averne ancora dentro lo spirito, malgrado altre mie scelte, fatte quando ho scoperto (e non grazie ad Aristotele o solo a lui, ma ad altri grandissimi pensatori) di essere "*zoon politikon*".

imparava assai presto la pratica di regole certe e condivise, divenute nobili in sé perché nate da valori nobili.
Considerato che “nessuno era negato per gli studi” e che la scuola e la lingua li avrebbe certamente resi “uguali”, era quasi ovvio considerare “naturale” che tutti andassero a scuola “dalla mattina presto fino a buio, estate e inverno”. Certo: “la vita era dura anche lassù” perché si dovevano colmare distanze abissali; proprio per questo, quando accoglieva i ragazzi che altre scuole avevano bocciato, si occupava di dettare ancora regole certe. Siccome “a scuola si va per imparare e che andarci è un privilegio”, anzi: che “è meglio della merda” delle stalle, nessuno avrebbe dovuto considerare la scuola stessa “un sacrificio, né tentare di ingannare il maestro cercando di copiare”, anche perché non ce n’era bisogno. “A Barbiana non c'era registro” (Scuola di Barbiana, cit.). Lì si cooperava, non si competeva! E il merito, perché assumesse valore, doveva per l’appunto declinarsi come “responsabilità”; infatti, “merito significa appunto maggiore assunzione di responsabilità”. (Chiesa, 2009).
La responsabilità e la sua correlata, l’autonomia sono – ripeterò qui un concetto già espresso – l’enfatizzazione delle differenze dentro un quadro di uguaglianza sostanziale, la pratica reciproca e solidale della libertà di ogni persona dentro e con lo stupafacente insieme delle persone e del mondo. Essa, tuttavia, non è una competenza, non si insegna in un’ora di lezione del mercoledì pomeriggio, né – men che mai – si impone o, peggio, si valuta. Nel mondo che educa, la responsabilità s’impara – o si dovrebbe imparare - per virtuosa analogia con comportamenti virtuosi.
Ciononostante, bisogna prendere atto che – lo ripeterò fino alla noia – nella scuola di oggi non è la conquista dell’autonomia responsabile il primo degli obbiettivi presenti nei molto spesso tanto fantasiosi (come i loro acronimi) quanto vuoti e spesso ingannevoli documenti progettuali didattico/educativi. Al primo posto effettivo (se non in quello spaziotemporale dell’editing) si colloca - purtroppo - la “competenza”.
La voce latina dotta *“compĕtere”, (*da cui l’italiano “competere, competenza”) vuol dire: “Incontrarsi, coincidere, raggiungere qualcosa CON qualcuno” (Cortellazzo - Zolli, 1979). Bene: se lo domandaste in giro vi accorgereste che tutti sembrano essere teoricamente ed operativamente d’accordo con l’etimo; salvo constatare che un’ampia parte di quei tutti non esita un istante a praticare una trasformazione - spesso inconsapevole - della “competenza” nella sua diletta figlia, “la competizione”, che oggi notoriamente vuol dire; “raggiungere qualcosa CONTRO qualcuno.” Forse questo accade perché in realtà nessuno sa o sa definire “la competenza”. Perfino Dio, quando disse: “Siano le competenze” e le competenze invasero le menti e i cuori di tutti gli uomini. Non si trovò così più nulla che non avesse una competenza. Anche il riposo, e Dio si chiese se il suo riposo fosse una competenza, se lui in realtà “sapesse riposare”. Così subentrò un terribile dubbio”. (Guasti, 2006).
Più probabilmente, però, questo accade perché si sa benissimo cosa la competenza sia, almeno da quando l’economia ha imposto che essa coincida con quel poco o tanto di sapere e saper fare – raggiunti per la maggior parte per addestramento - che ti spetta a seconda che tu debba essere suddito o principe. Non declinata così, ovviamente; i programmi di Lisbona sono una struggente costruzione linguistica che sembra nascere da nobilissimi e democratici ideali ma che, se letti senza vincoli o preadeguamenti ideologici, mostrano un vocabolario, una sintassi ed una semantica assai puntualmente indirizzati allo scopo. Basta contarne le “parole che contano”.
È indubbio, cioè, che esista un disegno, assai ampio nello spazio-tempo, al quale l’Italia non si sottrae, e che nessuno cerca di nascondere, se è vero che a Davos, a gennaio di quest’anno, gli economisti – proprio loro, non un manipolo di agit-prop - hanno raccontato senza vergognarsi che l’1% della popolazione mondiale detiene la ricchezza dell’altro 99%; e che soprattutto – spero che non si consideri questo mio dire come “retropensiero” - non vuole assolutamente smettere di accumularne sempre più. Che cosa sarebbe, se no, la crisi economica dentro la

quale siamo immersi? Bene: credo che questo disegno potrebbe attuarsi definitivamente quando la scienza e i suoi usi – né l'una né gli altri neutri - fossero totalmente asserviti all'economia. E la scuola, ossia il primo e più importante luogo nel quale le idee e i fatti dell'uomo passano di generazione in generazione, per narrazione e per trasmissione dei c.d. "artefatti culturali" (Vygotskij, 1976)[3]; e che, in virtù di questo, è – o dovrebbe essere - il luogo nel quale le stesse generazioni si riconciliano, corre invece il rischio di trasformarsi definitivamente in valletta allineata e coperta.
Per quello che ho appena detto, risulta, però, necessario concentrare l'attenzione su un terzo aspetto, che si lega alla coppia "sapere-saper fare" come loro metacostrutto: è il celebre "sapere sul fare", un'episteme non nuova né certo sconosciuta ma oggi prepotentemente venuta alla ribalta in virtù – o forse, a causa – dell'irrompere nel mondo della tecnica (e della tecnologia).
Per iniziare, penso che "il sapere sul fare", - se proprio non si può fare a meno di dare una definizione di "competenza" – sia l'unico costrutto che possa adeguatamente farlo. Detto in altre parole, ritengo che "la competenza" coincida con la consapevolezza che ogni uomo ha – o deve avere - della sua inarrestabile evoluzione individuale, sociale e culturale.
Questi sono i motivi grazie ai quali – sebbene vi sia ancora molto da pensare – e non concendendo nessuno spazio né a posizioni tecnofobiche né a quelle tecnoenfatizzanti, dico che il dibattito che dovrà necessariamente continuare, non potrà non riguardare almeno:
la tecnica e la sua invasione del mondo;
il rapporto tra tecnica e organizzazione economico/sociale planetaria;
il rapporto tra tecnica e scuola;
e, come conseguenza di queste, la ineludibile, necessaria richiesta, di ribadire la "reale" autonomia della scuola rispetto ad ogni forma di condizionamento esterno ed il suo collocarsi dentro un radicalmente diverso orizzonte di senso.
Cercherò di ragionare incrociando tra loro "queste domande". Nell'ormai lontano 1999 Umberto Galimberti (Galimberti, 1999) scriveva: "Siamo tutti persuasi di abitare l'età della tecnica, di cui godiamo i benefici in termini di beni e spazi di libertà". [...] "Con il termine tecnica intendiamo sia l'universo dei mezzi (le tecnologie), sia la razionalità che preside al loro impiego in termini di funzionalità ed efficienza". [...] "In questo senso è possibile dire che la tecnica è l'essenza dell'uomo. E ancora: "In questo inserimento rapido e ineluttabile portiamo ancora in noi i tratti dell'uomo pre-tecnologico che agiva in vista di scopi iscritti in un orizzonte di senso, con un bagaglio di idee proprie" e un corredo di sentimenti in cui si riconosceva. L'età della tecnica ha abolito questo scenario "umanistico", e le domande di senso che sorgono restano inevase, non perché la tecnica non sia ancora abbastanza perfezionata, ma perché non rientra nel suo programma trovar risposte a simili domande. La tecnica infatti non tende ad uno scopo, non promuove un senso, non apre scenari di salvezza, non redime, non svela la verità: la tecnica funziona, e siccome il suo funzionameto diventa planetario" [occorre] "rivedere i concetti di individuo, identità, libertà, salvezza, verità, senso, scopo, ma anche quello di natura, etica, politica, religione, storia.
Questo lungo brano pone – come è facile vedere – numerosissime questioni di drammatica portata. Non v'è dubbio che la tecnica abbia consentito all'uomo di godere di benefici in termini di beni e spazi di libertà. Ma allora mi chiedo se questo farsi della tecnica stessa nella storia del mondo e dell'uomo non abbia – invece – proprio uno scopo in sé, che coincide con lo scopo (dichiarato o no) di chi, mettendo in gioco i suoi liberi saperi ed il suo libero atto di

[3] Sono gli strumenti materiali - tecnologici e gli strumenti concettuali-psicologici. Di essi fa parte il linguaggio, che nella pratica didattica vuol essenzialmente dire "prevalenza della semantica sulla sintassi, capacità di trovare per ognuno e per tutti "le parole per dirlo", negoziazione e rinegoziazione continua dei loro significati mediata dalla narrazione (come scriveva Jerome Bruner; Bruner, 1992), centralità dell'"interpretazione", relazione dialogica, ecc…ecc.

volontà, abbia consentito "all'universo dei mezzi e alla razionalità che presiede al loro impiego" (per riprendere Galimberti) di divenire, di essere. Che senso avrebbero, se no e citando a caso, i vaccini? E che senso i computer? Io credo che né la tecnica né le tecnologie né il loro impiego che – ribadisco – non sono neutri[4] - siano nati "per caso". Più avanti cercherò di giustificare ciò, dicendo di Adamo e di Prometeo.
Il fatto più immediatamente eclatante, però, è la invasività e pervasività della tecnica a livello planetario. La globalizzazione dell'economia non sempre si dimostra cosa buona e giusta; esplicito quest'opinione, credo condivisibile, per non dimenticarmi della non neutralità della tecnica e della assoluta presenza di scopi in essa e grazie ad essa). Bene: essa e la globalizzazione della tecnica vanno di pari passo, si scambiano di continuo il posto nella relazione di causa-effetto, creando di fatto un problema assai grave che ci interroga fortemente, quello per cui "la tecnica da mezzo diventa fine" non perché la tecnica si proponga qualcosa ma perché tutti gli scopi e i fini che gli uomini si propongono non si lasciano raggiungere se non attraverso la mediazione tecnica." (Galimberti, cit. pag. 37).
Banalmente vero, ma – credo - contradditorio rispetto a quanto prima dichiarato, visto che il filosofo non può fare a meno di prenere atto che gli uomini abbiano dei fini; contestulamente, allora, non si può sostenere che la tecnica non ne abbia, (non in quanto tale, visto che, ad esempio, nessun computer o robot - creature belle senz'anima - ne avrà mai, per il semplice motivo che – fino ad ora - nessun computer o robot è capace di crearsi da sé) ma in quanto oggetti cui l'uomo - infonde (forse perché si ricorda di essere fatto "a immagine e somiglianza"?), tutta il suo repertorio di scopi, che – per espressa dichiarazione filosofica – possiede. Insomma: attraverso l'infusione della sua anima/scopo, l'uomo trasforma la tecnica "da mezzo in fine".
Di ciò credo si dovrà dar conto per il dovere di responsabilità, senza la quale si abiterà la casa della complicità, anche quando si convenisse sulla opinabile "intrinseca bontà" dei fini tecnologici.
Infatti, scrive ancora Weber (Weber, cit.) che «il raggiungimento di fini buoni è accompagnato il più delle volte dall'uso di mezzi sospetti», e «nessuna etica può determinare quando e in qual misura lo scopo moralmente buono "giustifica" i mezzi e le altre conseguenze moralmente pericolose». Per questo l'inversione "mezzi-fini" può celare un pericolo: senza l'assunzione di responsabilità che comporta la differenziazione di giudizio sugli scopi della "tecne" (di cui s'è appena detto), si potrebbe ad esempio concludere che sia la ricerca sulla produzione di energia mediante uranio che la bomba atomica abbiano pari dignità[5]. Salvo accorgersi che "la potenza manipolativa conseguita dalla scienza – o meglio, dalla sempre più rapida utilizzazione tecnologica delle sue scoperte – dà all'industria e in genere alle attività produttive delle società industriali una capacità senza precedenti di alterazione del mondo vivente" (Bevilacqua, 2011,b)
È del tutto evidente - se mi si consente un salto logico-deduttivo di media portata - che dell'inversione "mezzi-fini" si corre il rischio che se ne servano impudentemente coloro che intendano prendere e mantenere il dominio sul mondo con la tecnica e grazie alla tecnica e alla scienza, non importandosene dei danni che ciò provocherebbe e che in realtà provoca: per primo alla natura, che invece l'uomo stesso ha l'obbligo di conservare, senza se e senza ma, senza, cioè smettendo definitivamente di pensare che "ogni acquisto di potenza sia semplicemente progresso, accrescimento di sicurezza, di utilità, di benessere, di forza vitale, di pienezza di valori", "come se la realtà, il bene e la verità sbocciassero spontaneamente dal potere stesso della tecnologia e dell'economia" [6]. E poi, per convenienza, di non considerare i

---

[4] La tesi – con qualche variante - è sostenuta dallo stesso Galimberti (Galimberti, cit. pag. 34)
[5] In ogni tempo la tecnica è servita per la conformazione costruttiva dell'ambiente, ma in ogni tempo anche per la distruzione".(Jaspers, 1960).
[6] Papa Francesco, 2015, Lettera Enciclica "Laudato si'"

danni che provocherebbe all'uomo, ai suoi piccoli. "Inquieti come genitori e come educatori vediamo [che] i nostri figli e i nostri alunni […] abbarbicati a internet, a Facebook, alla playstation […] indossano lo schermo del computer come uno scafandro per scendere in solitudine misterica verso una specie di grembo […] senza spazio e senza tempo [dove] la connessione incantata alla rete determina […] processi di impoverimento dell'esperienza e di semplificazione della mente" (Marchetti, 2011)
Insomma: dal nostro posto di soci del mondo siamo passati ai suoi confini misterici. Così, il frutto della conoscenza e la scintilla di fuoco, per rubare i quali avevamo umanamente e consapevolmente rinunciato all'innocenza dell'Eden o dell'Olimpo, per collocarci al centro degli infiniti sentieri del tempo e della storia, hanno realizzato una vendetta, a causa della nostra stupidità e della malsana superbia che l'ha generata. Non abbiamo saputo tenere stretta la libertà che Adamo e Prometeo ci avevano conquistato, illusi che quella straordinaria creatura vivesse con noi per sempre, e si accontentasse solo delle nostre incolte e disamorate smancerie, o peggio delle nostre commerciali molestie. Abbiamo chiuso la libertà in un cassetto della nostra bottega di pizzicagnoli, evocandola solo quando scambiamo i – pochi - centesimi di illusione. La libertà, invece, ha bisogno di attenzioni quotidiane, delle quali solo un innamorato può esser capace. Il nostro disamore, invece, come in una sorta di complice "diminutio capitis", ha – appunto - invertito il senso del peccato. Abbiamo, cioè, offeso la straordinaria offesa che i giganti fecero al cielo, quando realizzarono il disegno divino. La stessa cosa vale per il sapere e per la conoscenza. L'ordine celeste era quello di dominare la scienza, non di lasciarsi dominare e corrompere da quella. Così, l'albero e la scintilla originari hanno destinato il loro frutto a chissà quale altra regione di quale altro spazio-tempo; e la libertà ha abbandonato la nostra casa, errando dietro a chissà qual altra cometa, per lasciare il posto ai maleodoranti e anneriti rami dell'albero del denaro, cui abbiamo cominciato a rendere idolatria. Del resto, si sa, con la libertà il rischio si corre; la libertà, per se stessa, può ribellarsi contro chi tenti di dominarla o di soffocarla; non lo farà, però con chi la ami, anzi: con chi la desideri. L'amore della e per la libertà è allo stesso tempo il limite e l'apeiron di questa straordinaria creatura. Per questo, il tradimento e l'abbandono della libertà, il concederle di inseguire, oscurando il passato, cioè la felice memoria del divieto violato[7], e il futuro, cioè il progetto dell'interminabile assalto al cielo, ha tragicamente trasformato anche il nostro presente e nella fattispecie ciò che ci riguarda più da vicino: non abitiamo più la "scholḗ", "l'ōtĭum" – "il modo di agire proprio degli uomini liberi" (Natoli, 2001) - ma *"l'algoritmo".*
Anzi: dall'algoritmo, col quale i nostri figli saranno scelti se e quando saranno ammessi a chiedere il/un lavoro, invece di pretenderlo come diritto, ci facciamo abitare, alla maniera del servo/cliente – quello della già citata "*custumer satisfaction*" - che dalla fedeltà spera di ricavare qualche vantaggio, quantunque misero; ma che, soprattutto, non sa o non vuol vedere altro; e non cercar altro che la sua prostrazione, che lo appaghi, in una sorta di disperata Sindrome di Stoccolma.
Chi avrebbe detto che avremmo "calcolato" il costo di un'emozione, di un affetto, perfino di una commozione?
Anzi: chi avrebbe giurato che saremmo stati gli assassini delle emozioni degli affetti e della commozione sotto l'allucinato effetto delle amarissime droghe che l'economia e il capitale, spesso travestiti da robot "faccio tutto io", ci propinano?[8]

[7] Credo che Dio stesso (o altri Numi), ponendo i divieti", in realtà desiderassero che fossero violati. I cristiani, in particolare, dovrebbero gioire di quel peccato, visto che – almeno secondo la loro dottrina - ha consentito a Dio di costruire la storia, inviando Cristo nel tempo-spazio dell'uomo.
[8] Credo sia chiaro che – per fare un solo esempio - non parlo dei robot che operano con il chirurgo di oggi, con risultati affatto diversi e assai migliori di quelli che otteneva un medico di cent'anni fa.

Eppure l'ordine celeste era quello di restar liberi, anche con la consapevolezza che il possedere e praticare la libertà più spesso avrebbe potuto costare dolore o solitarie malinconie; ma anche che quella pratica – sub specie necessitatis – avrebbe in ogni momento restituito all'uomo *la dimensione dell'umano.* E forse la riconquista dell'originaria innocenza al "*gigante fatto di umus",* nella sede dello spazio-tempo che vorrei chiamare, con facile analogia, dell'"*umanesimo di razza contadina"*, se mi si consente di citare la poesia.[9]

Prima di chiudere, però, vorrei ribadire che una premessa/intermezzo/conclusione collegata al discorso fin qui fatto deriva dall'assegnare alla scienza ed ai saperi che producono tecnica la qualita di sapere scientifico, e di contrapporlo ai cosiddetti saperi umanistici, tenerlo separato da essi, per primo nella nostra scuola. "A queste discipline (quelle umanistice – ndr), per la loro stessa sopravvivenza, per la conservazione di un diritto, sia pur limitato, di cittadinanza nelle istituzioni formative e nella più generale sfera pubblica, viene chiesto di esibire la loro utilità strumentrale di ultima istanza [...] nella presente società della produzione e del consumo (Bevilacqua, 2011,a). Così la scienza, che pure avevo accostato alla tecnica e sebbene avvertissi che ne era la causa, diventa "parte integrante del modo di produzione capitalistico, che incorpora nei suoi scopi tutti i saperi generati dalla divisione intellettuale del lavoro e tutte le tecniche che la macchina industriale va accumulando". (Bevilacqua, 2011, b). Anzi: così facendo, la scienza viene ridotta allo stesso rango di ciò che genera.

La scuola descritta e voluta dai successivi assalti (contro)riformatori non è estranea a tutto ciò. Anzi, come ho già cercato di dimostrare, è sicuramente funzionale alla affannosa ricerca del primato assoluto che l'economia realizza trasformando lo stesso sapere economico in tecnica; e questa, in fini.

Questa scuola - com'è facile intuire dopo tutta questa lunga premessa - è la già citata scuola delle "tre i", che pur essendo tra loro in situazione di subordinazione, vengono equiparati ai fini, perdendo definitivamente la loro condizione di strumenti epifenomeni, tal quale è un computer, ad esempio, fino a diventare obbligazioni o peggio, destino ineluttabile dell'uomo.

Questa scuola pensa, ad esempio, che un bambino debba imparare – meglio: debba addestrarsi – a programmare, magari per "gioco" - hanno detto[10] - un robotino, con la poco credibile scusa che quell'addestramento gli consentirà di "risolvere problemi" in modo creativo". Ora mi chiedo (da "esterno" allo strabiliante recinto delle neuroscienze): "una sequenza di ordini rigidi e subordinati" potrà mai sviluppre creatività? E la creatività, potrà mai essere ristretta in un misero ambito "SI-NO"? E ancora: avete mai sentito parlare di un cervello sequenziale/computazionale invece che di un cervello alveare, che è, per dirla in parole povere, quella grande "confusione" di cui siamo felici/infelici (dipende dai gusti) portatori? Ormai le stesse neuroscienze hanno certificato ciò che sapevamo da tempo e che da tempo andavamo predicando nei nostril comizi: l'ubi consistam dell'intelligenza, che è la mamma della creatività, è il - e nel - numero sempre crescente e mutevole di connessioni che i neuroni incessantemente stabiliscono tra loro[11]. Per questo credo che il coding ed il pensiero computazionale siano assai poveri e pericolosi, quanto l'uso prolungato dei loro strumenti. Per altro ed in altre parole, lo ha affermato perfino l'OCSE.

Risolvere un problema mediante "coding", infatti, lungi dal rendere omaggio all'interminable, complesso e non-deterministico lavorio della mente e della sua materia, che notoriamente e sostanzialmente "coincidono"[12] e che col "coding" non c'entra praticamente niente- - credo

---

[9] S. Quasimodo, (1995) "Ai sette fratelli Cervi, alla loro Italia".

[10] Questo dimosta che costoro non sanno cosa sia e qual importanza abbia "il gioco"; o, peggio, che del gioco abbiano una considerazione del tutto negativa, certamente economica.

[11] Si veda: Elena DUSI, L'intelligenza? Un'autostrada che collega i neuroni, La Repubblica, 7/1/2018

[12] Uno degli errori categoriali di cui si dice è pensare che "sarebbero l'intelligenza artificiale a fornire le risposte" alle domande su cosa sia la mente; e l'altro è pensare che si possa procedere ad analizzare "il comportamento, il linguaggio, l'abilità e le prestazioni mentali [...] seza aver prima compreso la biologia che ne sta alla base. (Edelman, 1995)

serva solo ad addestrare i futuri lavoratori, dividendone le vite tra "gli n punto 0" e gli "n punto infinito", ovvero tra chi ubbidirà e chi comanderà.
Questo è uno dei gravissimi sintomi di ciò che si vuol fare del mondo, servendosi – dicono - dell' "economia della conoscenza".
Noi invece vogliamo che l'uomo riconquisti – grazie al suo "conoscere" - il suo posto nell'universo. Per questo – come ripeto - dovremo rifondare un umanesimo totale, "di razza contadina", che passi per primo da una scuola che faccia il suo dovere, nella quale i saperi non siano parcellizzzati e mercificati: basta con la pretestuosa divisione tra saperi umani e saperi dis-umani! - ma accompagnino la grande catena dell'Essere, raccontando la storia delle storie dell'uomo stesso come sequenza di emozionanti relazioni affettuose con sé, con tutti gli altri uomini, con la natura, col cosmo. E per chi crede, con Dio.
Da questo punto di vista, la matematica è la prima più importante scienza dell'uomo perché coincide col suo pensiero e gli dà le parole per interpretare il mondo, facendone contemporaneamente un io e un noi. Già Dante certificava che la matematica è l'imparare (dal greco: manthano), e che il matematico è colui che desidera sapere quando scriveva:"E lo cielo del Sole si può comparare al'Arismetrica che del suo lume tutte l'altre stelle s'informano" (Dante, in: Convivio, II)
Una scuola che faccia il suo dovere si adopera affinché ad ogni persona della quale abbia riconosciuto l'unicità, l'irripetibilità e la molteplice unitarietà nell'uguaglianza sostanziale sia garantito ciò che lui già è: un io e un noi inestricabili[13].
Quei ragazzi – persona e società nello stesso tempo - quale che sia la loro identità individuale e sociale, non andranno mai medicalizzati, ma riconosciuti in relazione emozionale, affettiva e commovente. Con essi si metterà in campo una scuola "individualizzata" e cooperativa", secondo le modalità che ci sono note e attraverso un loro meticciamento che consenta di pensare ad una "nuova" e, a mio parere, davvero "buona" modalità didattico/educativa.
Ma, infine, a nessuno di essi sarà negato il diritto all'errore e la possibilità di correggerlo in relazione, qui ed ora, cioè mentre sta imparando ciò che un altro sta insegnando.
Ogni altra forma di valutazione – uguale a quelle odierne - perpetuerebbe la miserabile divisione tra gli essere umani, così come vuole o impone l'economia.
Gli insegnanti, anzi: i maestri, le persone che in una monarchia feudale come il Giappone sono le uniche ad essere esentate dall'inchino all'Imperatore, saranno "persone colte e aristocratiche" – come già ora è nella stragrande maggioranza dei casi, nonostante essi siano vituperati e offesi da una poltica miope, più attenta alle mance che a strategie complessive della formazione virtuose e democratiche. Gli ignoranti e plebei sono più facilemente ricattabili quando non siano essi stessi a scegliere di servire.
Della loro responsabile cultura (non solo) didattica, lo Stato sarà il garante, l'unico garante.
Così e solo così la scuola si ricollocherà in un grande orizzonte di senso, di cui ho cercato di descrivere le dimensioni, il grande obbiettivo di quell'umanesimo globale che è il mio più grande sogno.
La formazione iniziale ed in itinere offrirà loro non solo gli strumenti didattico/educativi ma una cultura rinnovata giorno dopo giorno, afffinche essi non siano i censori dei ragazzi, in particolare dei più poveri e i corresponsabili della loro "dispersione", ma i coprotagonisti dell'evoluzione democratica della società realizzata grazie alla loro evoluzione individuale e sociale.
"Il ragazzo che non studia non sarà un buon rivoluzionario", aveva scritto un ragazzo di Cuba sul suo diario; "ma un insegnante che non studia non sarà mai un buon maestro. Essi saranno autonomi nella ricerca e nell'insegnamento, ma dovranno mostrare di avere come stella polare del proprio lavoro – che sarà adeguatamente e non miseramente retribuito – la cura

[13] Dopo la scoperta dei nuroni-specchio "è bizzarro concepire un io senza un noi" (Rizzolatti, Sinigaglia, 2006)

quotidiana di ognuno dei ragazzi che gli vengano affidati. Insomma, chi insegnerà l'avrà fatto in virtù di una scelta responsabile, non di una miserante casualità che garantisca un lavoro purchessia. E abiteranno la relazione affettiva ed affettuosa momento dopo momento, come il più importante dei loro segni di riconoscimento. Tuttavia, questo non si può comprendete se non vengano invertiti – come dovrebbe accadere nella pacifica rivoluzione che vado sognando - le cause con gli effetti. Non si può – ad esempio - chiedere di attivare l'individualizzazione e la cooperazione didattiche e poi consentire che in classe vi siano venticinque, trenta e talvolta più ragazzi. Non si può chiedere ai ragazzi di attivare i processi creativi di cui tutti – dico tutti – dispongono senza trasformare la scuola in "laboratorio"[14], in ricerca costante di cammini del sapere che si costruiscono solo nel mentre si stanno facendo. Non si può sperare che il mondo migliori se non si pratica la collaborazione invece che l'individualismo "competente".
Collaborare unisce il cuore e la mente, dualità non dualista, anche quando esso generi un conflitto; all'atto della sua nascita al "laborare" fu donata una preposizione – il "cum" che da allora dovrebbe governare l'uomo e la sua vicenda. Forse gli fu donata da Dio.
Ma proprio per questo – per cum-dividerne la sorte - o forse proprio per onorare un misterioso comandamento di Dio, noi vorremo "più bene ai nostri ragazzi che a Dio" (dal Testamento di don Lorenzo Milani), soprattuto quando essi siano una minuscola voce, delle tenere spighe del mondo.

BIBLIOGRAFIA

ARISTOTELE, Metafisica, (a cura di G. Reale), 2000, Bompiani, Milano
BEVILACQUA P., 2011,a - I saperi nell'età globale, in: AA.VV., A che serve la storia?, Donzelli Editore, Roma
BEVILACQUA P., 2011,b – Saperi umanistici e saperi scientifici per ripensare il mondo; in: AA.VV., A che serve la storia?, Donzelli Editore, Roma
BRUNER, J. , 1992, La ricerca del significato, Bollati Boringhieri, Torino
CASTELNUOVO E., 1979, La geometria, La Nuova Italia, Firenze
CHIESA D., 2009, in: AA.VV., Le regole che educano, Non commerciale
Elena DUSI, 2018, L'intelligenza? Un'autostrada che collega i neuroni, La Repubblica, 7/1/2018
CORTELLAZZO M.; ZOLLI P., 1979 Dizionario etimologico della lingua italiana, Zanichelli, Bologna
DANTE, Convivio, libro II°
EUROSTAT, Ufficio Statistico dell'Unione Europea, 2017
GALIMBERTI U., 1999, Psiche e techne, L'uomo nell'età della tecnica, Feltrinelli, Milano.
MARCHETTI L., 2011, L'umanesimo e i compiti di una scienza "nuova" della formazione, in: AA.VV., A che serve la storia?, Donzelli Editore, Roma
MIUR, 2015, Circolare avente per oggetto "Educazione economica - offerta formativa 2015/2016."
NATOLI, S , 2001 , L'Avvenire, 25 aprile
JASPERS, K., 1960, La bomba atomica e il destino dell'uomo, Il Saggiatore, Milano
LOMBARDO RADICE L.,1976, Introduzione: logica e interdisciplinarità, in: AA.VV. Introduzione alla logica, Editori Riuniti, Roma.
GUASTI L., 2006, Competenze e Formazione, in: Scuolainsieme, La Tecnica della scuola, 5/2006
GRAMSCI, A. 1975, Quaderni dal Carcere, Einaudi, Torino

[14] Che mi piace definire come "la disponibilità dell'intelligenza a mettersi in viaggio, errando, insieme con ogni altro"

PAPA FRANCESCO, 2015, Lettera Enciclica : “Laudato si’”
RIZZOLATTI, G.; SINIGAGLIA, C., 2006, So quel che fai, Raffaello Cortina Editore, Milano
SCUOLA DI BARBIANA, 1976, Lettera a una Professoressa, Editrice Fiorentina, Firenze
VELADIANO M.P. 2018, La Repubblica, 26/2/2018
VYGOTSKIJ L.SL, 1976, Pensiero e linguaggio, Giunti e Barbera, Firenze
WEBER M., 1997, Il lavoro intellettuale come professione, Einaudi, Torino

IL CONTRIBUTO CULTURALE DELLA MATEMATICA PER UN'EDUCAZIONE TRASVERSALE

Brunetto PIOCHI

GRIMED, *bruno131@gmail.com*

Riassunto

Si evidenziano le caratteristiche della matematica che possono fornirci una base di lavoro per un contributo formativo di tipo trasversale. La matematica infatti non deve perdere le proprie caratteristiche ma proprio attraverso queste, insieme alle altre discipline, può e deve cooperare a una crescita della persona, crescita che a sua volta avrà certamente effetti positivi anche sull'apprendimento generale. Si propongono inoltre una serie di attività che possono costruire la base per un approccio di questo tipo.

Matematica come cultura.

In una scuola ed una società come quelle italiane tuttora pervase in profondità di un impianto di tipo neoidealista o crociano, parlare di *matematica come cultura* e quindi sottolinearne una visione di tipo trasversale può sembrare bizzarro. L'approccio didattico tradizionale pone l'accento sull'insegnamento/apprendimento di leggi, regole e tecniche: all'alunno si richiede di imparare e ripetere quanto appreso. Come è ormai noto, tale approccio ha l'effetto di promuovere un atteggiamento passivo nei confronti della matematica: lo studente impara, o meglio 'si addestra' a risolvere esercizi del tutto simili a quelli trattati dell'insegnante, convinto (a ragione) che su quelli sarà valutato; resta escluso quasi sempre ogni specifico interesse alla comprensione del *senso* e del *perché* di quanto appreso. È altrettanto noto che questo tipo di proposta produce disaffezione ed è una delle cause di molti fallimenti, soprattutto da parte di studenti che non hanno una motivazione intrinseca all'apprendimento.

Occorre aiutare gli insegnanti a superare quella visione 'tecnicista' della materia, la quale mostra ogni giorno di più il suo fallimento nella pratica didattica quotidiana. I docenti di scuola secondaria, in particolare, hanno bisogno di una 'rivoluzione copernicana' in questo senso; la scuola secondaria resta ancorata a prassi didattiche del tipo sopra richiamato, le quali danno un'enorme importanza agli aspetti tecnici cosicché anche i colleghi meglio intenzionati si trovano ad affrontare forti resistenze (anche personali) ad un cambiamento che è soprattutto metodologico ma che si riflette almeno in parte nei contenuti proposti.

Del resto il problema non riguarda esclusivamente gli insegnanti di matematica e neppure si limita all'Italia soltanto: troppo spesso si finisce per offrire "la minor educazione [matematica] proprio a quegli studenti che ne avrebbero maggior bisogno" (Forman e Steen, 2000). Qui ci interessa evidenziare le caratteristiche della matematica che possono fornirci una base di lavoro per un contributo formativo di tipo trasversale, più che interdisciplinare. La matematica infatti non può e non deve perdere le proprie caratteristiche ma proprio attraverso queste, insieme alle altre discipline, può e deve cooperare a una crescita della persona, crescita che a sua volta avrà certamente effetti positivi anche sull'apprendimento generale.

Matematica e matematici

Il 27 novembre 1811 il matematico francese Cauchy, invitato per una conferenza sui limiti del sapere umano presso una società culturale di Cherbourg, azzardò una profezia: egli sostenne che era totalmente falsa l'opinione corrente fra i suoi contemporanei di una crescita praticamente illimitata del sapere umano. Egli appoggiò questa opinione con una serie di affermazioni riguardanti varie scienze, compresa la matematica, suo campo di studi: sostenne infatti che ormai si sarebbe potuto aggiungere ben poco al già conosciuto. Chiunque è oggi in grado di riconoscere l'assoluta infondatezza di tale previsione a proposito delle scienze in genere, ma questa facilità di giudizio difficilmente vale anche per la matematica. Crediamo che la maggioranza delle persone sia in effetti convinta che, al contrario di quanto accade nelle scienze in generale, in matematica non ci sia più molto da scoprire e dunque compito del matematico sia insegnare ciò che ha ereditato.

In effetti è estremamente raro trovare in qualche rivista o trasmissione televisiva di divulgazione una presentazione di teorie matematiche contemporanee, intendendo per contemporanea una teoria tuttora oggetto di ricerca ovvero una teoria di cui si continuino a scoprire nuovi risultati. È tuttavia indispensabile offrire ai nostri studenti almeno l'intuizione di cosa significhi il lavoro di ricerca matematica e l'occasione di sperimentarlo (ovviamente, al proprio livello !)

Al presente, quasi tutti coloro che vivono nei paesi sviluppati sono convinti dell'importanza della matematica e della sua necessità, praticamente in tutti i settori della scienza e della tecnica. Ma che cosa sia la matematica oppure che cosa faccia un matematico resta per la grande maggioranza della popolazione un mistero (Dieudonné 1989). È abbastanza diffusa l'idea (basata su una specie di imprinting ricevuto nella scuola primaria) che la matematica sia calcolo[15] e quindi che un matematico sia una persona interessata e dedita ai calcoli, dove spesso per *calcoli* si intendono calcoli con le quattro operazioni, solo un po' più complicati. Un'altra ipotesi piuttosto diffusa è che il matematico abbia a che fare con i calcolatori; oppure non è difficile trovare chi sia convinto che un matematico sia una persona che conosce molte formule, eventualmente più efficaci o più veloci.

Matematica e scienze umane: sono davvero così diverse ?

L'opinione corrente vede una profonda diversità fra matematica e scienze umane. Tuttavia se si esaminano alcune caratteristiche non certo secondarie della matematica, si deve al contrario riconoscere una solida comunanza, dovuta all'essere tutte produzioni della mente umana. Il fatto che molto spesso questa caratteristiche non siano percepite dipende soprattutto dal fatto che "se la matematica viene insegnata semplicemente come apprendimento di procedure allora nessuno dei [suoi] elementi umanistici può essere percepito. È raro che l'insegnamento della matematica, a livello elementare o avanzato, comprenda o metta in luce gli aspetti umanistici della disciplina" (P. Davis in White, 1993, p. 10).

Voglio qui evidenziare una serie di punti di contatto, motivandoli naturalmente in termini interni alla disciplina (cfr. (White, 1993)). Quando farò riferimento a specifici aspetti tecnici, cercherò di dare anche chiarimenti in proposito tramite spiegazioni quanto più possibile semplici, per mettere ogni lettore in grado di seguire il ragionamento, chiedendo scusa in anticipo se questo potrà un po' appesantire il discorso.

---

[15] Una estremizzazione di questo atteggiamento la si può leggere nella frase seguente, tratta da (Cattabrini Di Paola, 1997): "*La matematica ha un'importanza scientifica molto ridotta perché è soltanto calcolo numerico: non è importante per la formazione umana e può essere facilmente sostituita dal computer*". Ma anche senza arrivare a questo estremo, resta il fatto che per la grande maggioranza delle persone (studenti compresi) la Matematica si divide in Geometria e… Matematica (!), identificando appunto, più o meno inconsciamente, quest'ultima con il calcolo.

1. *La matematica è ambigua,* come la letteratura, in particolare come la poesia. Questa affermazione può far sobbalzare coloro che sono convinti che la caratteristica più profonda della matematica sia la prevedibilità: non si dice forse 'è sicuro come che 2 + 2 fa 4' ? [16]. Eppure è ormai definitivamente chiaro (almeno per i matematici) che la 'certezza' della matematica è effettiva *solo* a partire dagli assiomi scelti: variando gli assiomi, varia la matematica su cui si lavora. Le geometrie non euclidee[17], ad esempio, ci portano ad affermare, come sosteneva Poincaré, che "non esiste una geometria vera; esiste solo una geometria [più] comoda" delle altre per descrivere un certo spazio[18].

2. *La matematica possiede una componente estetica*. Essa appare evidente a chi pratica la disciplina per professione, ma può essere apprezzata in buona misura anche dal 'profano', purché questi sia messo di fronte a situazioni di apprendimento significative.

> Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto permanente per la matematica brutta. (Hardy, 1989).

P. Erdos usava per definire questa qualità della matematica le parole *bellezza* e *penetrazione,*ma faceva anch'egli fatica a spiegare di cosa si trattasse "È come chiedere perché la Nona sinfonia di Beethoven è bella" diceva. "Se non lo sai tu il perché nessuno può dirtelo. Io so che i numeri sono belli. Se non lo sono loro niente lo è" (P. Hoffmann, 2000: 41)

3. *La matematica è un linguaggio* (almeno in buona parte). Alcuni fatti hanno bisogno di essere comunicati e lo sono in modo più efficace se si usa il linguaggio matematico per descrivere, fare ipotesi, sviluppare ragionamenti. Vale la pena sottolineare come proprio il linguaggio matematico permetta di compensare eventuali imperfezioni descrittive: "la geometria è la scienza dei ragionamenti corretti sulle figure sbagliate" (G. Polya).

Nel XX secolo la matematica ha cercato di sviluppare un proprio linguaggio totalmente formalizzato, al fine di ridurre al minimo le ambiguità insite nel linguaggio comune; tuttavia, sul piano formativo, una competenza nell'uso del linguaggio comune a scopi matematici è fondamentale. Dare spazio, a qualunque livello didattico, a riflessioni sul perché si dimostra e cosa significhi dimostrare è assai più utile che imparare (più o meno a mente) una sequenza di dimostrazioni. Ora che la disponibilità diffusa di calcolatori e relativo software permette di sperimentare rapidamente la validità di ipotesi e congetture, questa attività sarebbe davvero importante: si pensi all'uso di Geogebra o Excel rispettivamente in Geometria e Aritmetica.

4. *La matematica ricorre a metafore*. Forse sarebbe più corretto mettere la parola 'metafore' fra virgolette, ma essa non è assolutamente inadeguata per il tipo di oggetti a cui ci si riferisce, cioè ai *modelli*, i quali sono utilizzati in matematica sostanzialmente secondo due modalità: si parla di *modello matematico* per indicare un insieme di equazioni (solitamente, ma non necessariamente, equazioni differenziali) la cui soluzione costituisce una descrizione matematica di un dato fenomeno (variazioni climatiche, sviluppo di una colonia batterica,

---

[16] Come contrappunto, riporto ancora una frase da (Cattabrini Di Paola, 1997): "*Io amo rifugiarmi in questo mondo, e lo faccio spesso quando sono nervoso o triste: se c'è qualcosa che non va apro il libro di matematica, mi 'tuffo' nei calcoli e tutto il resto intorno a me scompare. E' una consolazione sapere che, qualunque cosa accada, il coseno di zero non smetterà mai di essere uno.*"

[17] Il lettore interessato può utilmente consultare (Agazzi Palladino, 1978) oppure (Trudeau, 1991). Entrambi i volumi trattano delle geometrie non euclidee e del loro effetto sulla comprensione del ruolo della matematica: il primo lo fa più da un punto di vista filosofico, mentre il secondo è più 'matematico' ma entrambi sono perfettamente comprensibili da un lettore di cultura superiore, qualunque sia la sua formazione.

[18] La stessa sicurezza di non contraddittorietà della matematica è solamente una *sicurezza relativa*. Nel programma enunciato da Hilbert al Congresso dei matematici dell'anno 1900 figurava fra gli altri il problema cruciale di fondare la coerenza logica di tutta la matematica su una teoria della cui non contraddittorietà si potesse essere certi. La questione fu effettivamente risolta dal matematico Gödel nel 1929, ma in senso negativo: non è possibile in alcun modo dimostrare la coerenza logica di una teoria matematica all'interno di essa !

diffusione di una epidemia,...; tali modelli prendono le mosse da una situazione reale, interpretata matematicamente sulla base di ipotesi o intuizioni, la cui validità verrà poi confermata o disconfermata dalle deduzioni che si potranno trarre dai modelli); si parla di *modello sintattico* riferendosi alla "traduzione" o "interpretazione" di una teoria mediante oggetti propri di una teoria diversa[19].

In che senso questi modelli possono essere considerati metafore ? Indubbiamente nessuno degli oggetti trattati è ciò che vuole rappresentare, ne condivide certe caratteristiche e ne suggerisce altre, ma il rappresentato e il rappresentante hanno ciascuno proprietà diverse.

5. *La matematica ha una storia*. Questa affermazione sarebbe di per sé ovvia: dopotutto ogni attività della mente umana ha una sua 'storia'. Essa diventa invece centrale proprio perché le verità e le affermazioni matematiche sono atemporali e decontestualizzate e perciò stesso sono troppo spesso viste come fuori dalla storia.

La consapevolezza della storicizzazione della matematica offre al contrario una potente chiave, da un lato per rivedere l'approccio didattico tradizionale avvicinandolo alla realtà dei problemi culturali, dall'altro per sottolineare ancora una volta la capacità della matematica di "parlare" un linguaggio comune con le altre discipline, condividendone la tensione verso l'uomo. Un tale approccio risulta affascinante per i ragazzi di qualunque età e si presta a diverse applicazioni: mi limito a ricordare le proposte del Giardino di Archimede[20].

6. *Lo sviluppo della matematica si intreccia in maniera inestricabile con quello della filosofia*. A riprova si può citare come la struttura aristotelica di una scienza si attagli perfettamente (in pratica soltanto!) alla matematica; oppure si può ricordare il ruolo cruciale che Kant attribuisce alla geometria come fonte di enunciati sintetici a priori. D'altra parte, la filosofia ha contribuito a chiarire la portata di alcune teorie o a spingere la matematica a sciogliere proprie ambiguità e a formalizzare meglio i propri fondamenti; è il caso del paradosso di Russell[21] il quale costrinse a rifondare la teoria degli insiemi.

---

[19] Nella visione moderna della matematica gli assiomi di una teoria non sono descrizioni di proprietà "evidenti" di oggetti reali idealizzati (come in Euclide, ad esempio), ma sono affermazioni definitorie di entità astratte. Per comprendere meglio la differenza, consideriamo la frase "per due punti passa una sola retta". Tale frase appare come postulato negli *Elementi* di Euclide e si riferisce ad enti (rette e punti) noti a chi scrive e chi legge: per verificare la proprietà basta rifarsi a esperienze concrete e condivise. La stessa frase appare anche fra gli assiomi di Hilbert nel suo fondamentale lavoro del 1899 (Hilbert, 1970), ma in questo caso essa ci dice qualcosa di diverso: ci informa che gli enti di cui si sta parlando (e che Hilbert chiama tradizionalmente "rette" e "punti", senza però avere in mente un oggetto preciso) sono collegati da una relazione binaria ("passa per") fra le cui proprietà figura quella illustrata da tale frase. Lavorando su enti astratti, però, è sempre presente il rischio di fare affermazioni contraddittorie, non avendo (come appunto lo aveva la geometria classica) un "mondo reale" di riferimento su cui verificare la coerenza delle affermazioni. Per ovviare a questo, si ricorre appunto ai *modelli sintattici*: ci si riferisce ad un'altra teoria e si attribuisce le "etichette-nomi" degli enti su cui si sta lavorando ad oggetti di questa seconda teoria. Gli assiomi dei nostri enti devono risultare proprietà dimostrabili degli oggetti aventi l'etichetta corrispondente: in questo caso si ottiene una dimostrazione di non-contraddittorietà (relativa) della teoria di partenza. Hilbert ad esempio usa la geometria analitica (ovvero la teoria dei numeri reali) per verificare la non contraddittorietà relativa degli assiomi con cui intendeva rifondare la geometria (euclidea e non). Il lettore interessato è invitato a riferirsi ancora a (Agazzi Palladino, 1978) oppure (Trudeau, 1991).

[20] http://web.math.unifi.it/archimede/

[21] Come è noto, il paradosso presentato da Russell nel 1901 prende le mosse dall'osservazione che, dato un qualsiasi insieme, è sensato chiedersi se esso appartiene o no a se stesso. Naturalmente un insieme di auto non è un'auto e un insieme di gatti non è un gatto, ma l'insieme i cui elementi siano tutti gli insiemi che hanno più di 10 elementi è "certamente "tale da appartenere a se stesso. Così si può prendere in considerazione l'insieme i cui elementi sono *tutti quegli insiemi che non sono elementi di se stessi*. L'esistenza di tale insieme conduce inevitabilmente a una contraddizione: esso può essere un elemento di se stesso se e solo se *non* è un elemento di se stesso ! Una formulazione più 'giocosa' del paradosso può essere la seguente: "Un certo villaggio ha fra i suoi abitanti un solo barbiere, il quale è sempre perfettamente sbarbato. Egli rade *tutti e soltanto* gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Ebbene, chi è che rade il barbiere ?". In questa forma tuttavia il paradosso può essere risolto in maniera netta: tale barbiere non esiste, le condizioni poste sono contraddittorie.

Proprio i paradossi, a partire da quelli classici del mentitore[22] o della corsa fra Achille e la tartaruga fino ai paradossi visivi costituiti dalle figure impossibili di Escher, possono fornire un fertile terreno per chiarire i campi di incontro e le aree di vicinanza fra queste due discipline. Ancora una volta è utile sottolineare la natura trans-disciplinare di un lavoro su questi temi. Si tratta di mettere a fuoco uno "sguardo comune" che riesca a cogliere le varie sfaccettature, illuminando così le discipline stesse.

Matematica e narratività

I punti illustrati nel paragrafo precedente mostrano come, tutto considerato, sia naturale un approccio alla matematica a partire dalla narratività (Piochi (2005) e (2011)) e come anzi esso rappresenti quantomeno un tentativo da effettuare per opporsi alla perdita di senso della disciplina stessa. È questo infatti il rischio (o meglio l'effetto reale) ove la matematica venga presentata e appresa come tecnica, come pura sintassi, avulsa da qualsiasi contesto storico e applicativo significativo[23]. Nella scuola primaria non mancano esperienze che tentano di superare questa frattura, ma a livelli superiori la situazione è ancora molto bloccata: perfino in scuole, come ad esempio gli Istituti Professionali dove gli esiti disastrosi di un simile approccio sono evidenti e dove proprio la tipologia della scuola e dei suoi utenti dovrebbe spingere a ribaltare la prassi comune, solo di recente si è cominciato a sperimentare approcci diversi ottenendo riscontri assai positivi (Bagni, 2016.

D'altra parte come conciliare la 'fuga dall'errore' nelle ore di matematica, l'uso frenetico del bianchetto per coprire le proprie sviste e fraintendimenti, con "il racconto di progetti umani che sono falliti, di attese andate a monte" propostoci dalla narratività che in tal modo "ci offre il modo di addomesticare l'errore e la sorpresa" (Bruner, 2002: 35) ? Una conciliazione è possibile solo se si accetta l'errore come componente naturale di ogni attività umana, anzi come fonte di apprendimento. Ciò presuppone però la capacità di attivare competenze di tipo metacognitivo negli allievi (e negli insegnanti…), richiede un approccio didattico e valutativo nuovo, stimola la scuola a ricercare strutture anche logistiche e organizzative diverse: si può agevolmente proporre e correggere una gran quantità di verifiche se ci si limita a controllare l'esattezza del risultato, ma un lavoro di (ri)scoperta di senso, di discussione collettiva, di analisi e valutazione del processo che ha prodotto un certo risultato non sono compatibili con grandi numeri e difficilmente lo sono con eccessivi dislivelli di apprendimento.

L'approccio storico significativo, l'uso corretto del linguaggio, la capacità di elaborare argomentazioni pro o contro una data ipotesi, una personale rielaborazione di proprietà o tecniche offrono potenzialità enormi all'apprendimento della matematica. E, certo, tali aspetti hanno tutto da guadagnare dal coinvolgimento dei colleghi delle diverse discipline (non è casuale che queste metodologie trovino un campo più fertile nella scuola primaria, dove più comune è l'interazione e la programmazione comune fra insegnanti di materie diverse). Dunque diventano terreno di lavoro per un consiglio di classe che si ponga *in quanto tale* come protagonista della didattica.

In questa direzione si muovono alcune delle piste di lavoro presentate più sotto, studiate in modo da offrire agli studenti la possibilità di lavorare su uno stesso tema matematico in collaborazione con altri docenti, portatori di visioni, conoscenze e competenze diverse.

[22] "Io sto mentendo" è ancora una frase che risulta contemporaneamente *vera e falsa*; la frase riprende il "paradosso del cretese mentitore" di Epimenide.

[23] "[…] *scelsi il Liceo Scientifico dove la matematica è una delle materia fondamentali. Non so per quali ragioni ma incominciai ad odiare questa disciplina: i calcoli diventavano sempre più difficili e i problemi sempre più assurdi*". "*La nostra matematica si limita ad esercizi in cui occorre ricordarsi molte formule e in cui bisogna trovare l'area di non so che assurda funzione.*" (ancora da (Cattabrini Di Paola 1997)).

Per ciascuna di esse propongo una breve scheda, indicando esplicitamente i "punti di forza" per una revisione della didattica della matematica; gli argomenti interni alla disciplina che vengono affrontati; le materie che potrebbero essere coinvolte. Ognuna di queste proposte è trattabile a diversi livelli: ogni insegnante è invitato, confrontandosi con i colleghi, a individuare gli aspetti e le modalità più indicate per i propri allievi.

a. MODELLI MATEMATICI

Materie coinvolte	MATEMATICA, SCIENZE, CHIMICA, TECNOLOGIA, ECONOMIA
Temi affrontabili	• Successioni, serie, numeri reali • Statistica • Funzioni; equazioni differenziali • Geometria Analitica
Obiettivi significativi per la Matematica	• Aiutare a comprendere la matematica come scienza che risponde alle richieste e ai vincoli della realtà • "Rivisitare" il formalismo matematico, come strumento che trova i suoi vincoli e le sue spiegazioni nella rappresentazione del reale • Guidare ad un uso "intelligente" del software • Porsi e risolvere problemi
Argomenti proponibili	• Decadimento radioattivo • Dinamica delle popolazioni • Temi di ricerca operativa

Da sempre la matematica si è posta il problema (nel tentativo di "gestire" la complessità del reale) di costruire rappresentazioni efficaci dei fenomeni della realtà: si sono così costruiti dei *modelli matematici*, ovvero tali che le relazioni reciproche fra i diversi enti sono espresse in termini matematici. In generale un modello di un sistema esprime la conoscenza di un fenomeno e come tale consente di rispondere a domande sul sistema senza la necessità di compiere una gran mole di esperimenti. Esso costituisce quindi un potente mezzo di previsione e descrizione del comportamento di un sistema.

Naturalmente costruire un modello significa "narrare" un evento, al fine di coglierne i dati significativi; pertanto la narratività non è certo estranea alla formalizzazione di un modello. Inoltre il modello è sempre in divenire e quindi richiede un continuo sforzo di adeguamento da parte del "narratore" ma anche di chi lo interpreta[24].

In una scuola secondaria di I grado si possono affrontare semplici questioni di probabilità oppure partire dalla pagina di Leonardo da Vinci sull'uomo vitruviano[25]. In una scuola secondaria di II grado, si può confrontare ad esempio il modello maltusiano (1798) di crescita di una popolazione, basato sull'assunto che la crescita sia proporzionale al numero degli individui esistenti, con il modello di Verhulst (1838) il quale tiene anche conto delle risorse disponibili e dunque della competizione fra individui per la sopravvivenza. La presentazione dei due modelli si presta a considerazioni sociali, demografiche, filosofiche e religiose e non

[24] Si invita il lettore a leggere l'articolo "*The research matematician as storyteller*" di **W. Y. Vélez e J. C. Watkins al** sito http://gears.tucson.ars.ag.gov/beepop/story.html per una conferma di queste affermazioni.

[25] Si possono trovare attività in proposito fra quelle proposte nei piani nazionali PQM o m@t.abel : www.scuolavalore.indire.it

può certo essere trattata esaurientemente se non in un'ottica trans-disciplinare. In (Piochi, 2008) ho presentato una proposta molto coinvolgente per gli studenti di una Secondaria, a partire dall'analisi della curva di Gauss di mortalità per un certo tipo di cancro.

La presentazione di alcuni modelli di fenomeni biologici o fisici nella scuola secondaria di II grado può essere effettuata (come è in effetti prassi piuttosto diffusa nei paesi anglosassoni) con questo tipo di approccio, più sperimentale e concreto, anziché proponendo una teoria già sistematizzata e completa. Ne guadagnerebbe certamente la comprensione del fenomeno da parte degli studenti, ma soprattutto si compirebbe un passo fondamentale nella direzione della crescita di competenze trasversali come quelle di cui stiamo trattando.

b. "ABACO" ovvero MATEMATICA MERCANTILE

Materie coinvolte	MATEMATICA, ITALIANO, STORIA, (LATINO, LINGUA STRANIERA)
Temi affrontabili	• Aritmetica • Algebra • Geometria elementare (e introduzione alla Trigonometria)
Obiettivi significativi per la Matematica	• Porsi e risolvere problemi • Aiutare a comprendere la matematica come scienza che risponde alle richieste della società • "Rivisitare" tecniche di calcolo elementari • Riflettere sul rapporto fra linguaggio naturale e linguaggio algebrico
Argomenti proponibili	• Algoritmi delle operazioni • Problemi di compra-vendita, cambio • Problemi di suddivisione di utili o perdite in società • Problemi di "matematica dilettevole"

Secondo quanto si legge nella *Cronica* del Villani, nel 1338 su circa 90.000 abitanti a Firenze, i bambini che imparavano a leggere andavano da 8.000 a 10.000, quelli che ricevevano una formazione di tipo umanistico andavano da 550 a 600 e quelli che imparavano l'*abaco* da 1.000 a 1.200 divisi in 6 scuole. Erano, questi ultimi, figli di mercanti, i quali avevano scoperto come la scrittura dei decimali importata dagli arabi era estremamente più efficace e funzionale di quella romana; pertanto pagavano di tasca propria insegnanti (*maestri d'abaco*) per fornire un'istruzione adeguata ai loro successori.

Questi insegnanti utilizzavano libri e quaderni di esercizi di cui ci sono pervenute alcune copie[26], i quali sono una fonte pressoché inesauribile di questioni che rivestono aspetti matematici, storici, di costume, ecc. Non manca in tali trattati neppure una sezione di problemi dilettevoli e curiosi, nel presupposto che "ogni sano intelletto arebbe a noia occuparsi sempre di mercantia" (così l'autore del trattato trascritto in (Arrighi 1974)) e dunque di conti ….

[26] Esistono varie trascrizioni di diversi di questi trattati: segnaliamo (Franci e Toti Rigatelli, 1982) oppure (Bottazzini et al., 1992). Per informazioni su un Maestro d'abaco celebre ai suoi tempi, Paolo Dagomari o Paolo dell'Abaco, si veda (Piochi, 1984).

Un problema come il seguente apre davanti a sé un mondo: una società di mercanti, di città, di stili di vita e di lavoro, di misure diverse… Qui il problema è 'tradotto' in italiano corrente, ma la proposta in volgare (in certi casi direttamente dal latino: solitamente un latino medioevale, dunque non troppo difficile a comprendere da parte dei nostri studenti) permette di far rivivere ancora meglio il mondo coinvolto:

> Un mercante comprò una pezza di panno di 50 *alle* a Parigi e pagò 18lb 5s e 4d di *parigini.* La portò a Firenze, dove 7 *alle* equivalgono a 4 *braccia* e dove il s di parigino vale 23 d di *fiorentini*. Quanto vale a Firenze la pezza acquistata a Parigi?

I Trattati di Aritmetica mercantile dal XIV al XVI secolo presentano problemi le cui tematiche vanno dall'aritmetica alla geometria, a 'quesiti rompicapo' che potrebbero comparire (e spesso compaiono) in riviste odierne di enigmistica[27]. Una panoramica sulle questioni trattabili si può trovare in (Franci & Toti Rigatelli, 1982).

Appare dunque evidente quanto conti la narratività in un simile approccio: non soltanto i testi da affrontare sono esempi di 'testi narrati', ma gli studenti potranno trovare l'occasione di consultare codici del XIV secolo calandosi in qualche modo nel 'vissuto' dell'epoca: come testimonia chi ha avuto modo di viverla, si tratta sempre di una esperienza coinvolgente ed emozionante.

D'altra parte, questi testi mostrano la risposta che la matematica offre ad un mondo che, con la Rivoluzione commerciale, diventa più complesso, a riprova di come la matematica si ponga comunque sempre problemi coerenti con il proprio tempo, pur servendosi di risposte 'inventate' in altre epoche: i numeri indoarabi avevano già diversi secoli di vita nel 1202 quando Leonardo Fibonacci li presentò nel 1202 all'Occidente, avendone intuito le potenzialità come risposta a questioni ormai ineludibili di funzionalità computazionale. Inoltre lo studente potrà così affrontare una matematica ancora in fase di pre-formalizzazione, e questo darà all'insegnante lo spunto per riflessioni sull'utilità dei formalismi e sui loro vantaggi nonostante l'innegabile pesantezza.

c. PARADOSSI

Materie coinvolte	MATEMATICA, FILOSOFIA, ARTE
Temi affrontabili	• Logica, linguaggio, insiemi • Successioni, serie, numeri reali • Geometrie diverse
Obiettivi significativi per la Matematica	• Esaminare i temi di logica in modo interessante e piacevole • Spingere a "verbalizzare" la matematica: comprendere, spiegare, sciogliere un paradosso richiede competenze verbali significative • Inquadrare certi temi in un contesto storico • Affrontare il rapporto fra Geometria e Prospettiva o in generale fra geometria e Rappresentazione

[27] Diamo due esempi, tratti entrambi da (Franci e Toti Rigatelli, 1982) e ripresi da un trattato del XVI secolo, in cui non è difficile rintracciare gli 'antenati' di odierni quesiti o addirittura di modi di dire ('salvare capra e cavoli') "Una golpe è innazi a uno cane 80 passi et omgni 7 passi del cane sono 5 della golpe, adimando in quanto tempo el cane la giongniarà"; "Uno lupo, un cane, una pecora e uno cavolo ànno a passare uno fiume in una barcha che non passa si non 2 per volta e uno de 2 sempre à da guidare la barcha e di questi 4 sono sospetti di qua dal fiume, di là dal fiume et in su la barcha, questi: el cane el lupo, e lupo et la pecora, la pecora el cavolo, che non posano restare insieme in niuno de 3 luoghi, si cercha el modo che passorno e come ferno".

Argomenti proponibili	• Zenone, Achille, i filosofi Greci… • Russell e gli insiemi • Paradossi metalogici: il cretese, l'impiccato… • Figure impossibili • Escher

Nella storia intellettuale dell'umanità, i paradossi hanno spesso giocato un ruolo centrale. Ogni paradosso ci mostra come le nostre sistemazioni siano solo tentativi parziali di risposta alla complessità del reale (o dell'immaginario): ogni volta che in una disciplina ci imbattiamo in una affermazione coerente che non può essere risolta nell'ambito del quadro concettuale entro cui si muove, dobbiamo rielaborare le nostre interpretazioni e i nostri modelli.

La parola stessa paradosso, derivando da *parà* e *doxa,* indica qualcosa di "contrario all'opinione comune". Si possono però dare definizioni più specifiche

> che comprendono fondamentalmente tre diversi significati: 1. un'affermazione che sembra contraddittoria ma che in realtà è vera; 2. un'affermazione che sembra vera ma che in effetti conduce a una contraddizione; 3. un'argomentazione valida o corretta che porta a conclusioni contraddittorie. Ovviamente i tipi 1. e 2. di affermazioni paradossali sono spesso, anche se non sempre, conclusioni di argomentazioni del tipo 3. (Falletta 2001: pag. 8)

L'utilità di una proposta didattica su questa tematica risiede sia nell'apprendere a *riconoscere la contraddittorietà* di un'affermazione (competenza niente affatto banale in una società democratica e ancora più utile in epoca di *fake news*!) sia nel tentativo di *esplorarne le conseguenze*, in un dialogo costante con chi ha percorso prima di noi la stessa strada. Ogni paradosso del resto *ha una storia* ma anche *è una storia* e come tale è riferita a individui e società presenti nella nostra mente. Il "cretese mentitore" o il barbiere di Russell sono individui perfettamente comprensibili dalla nostra mente, eppure la loro 'esistenza virtuale' ci costringe a prendere atto dei limiti stessi della nostra sintassi logica. Niente di diverso ha fatto l'esperimento di Michelson e Morley sulla velocità della luce nella storia della Fisica.

d. LETTERATURA e MATEMATICA

Materie coinvolte	MATEMATICA, ITALIANO, LINGUA STRANIERA
Livello scolastico	Triennio
Temi affrontabili	• Logica, linguaggio • Algebra • Geometria analitica
Obiettivi significativi per la Matematica	• Spingere a "verbalizzare" la matematica • Stimolare fantasia e intuizione • Cogliere l'aspetto ludico della materia • Porsi e risolvere problemi • Analizzare e formalizzare la coerenza logica di una data situazione
Argomenti proponibili	• Testi o problemi "a tema" ("L'uomo che sapeva contare", l'Isola dei Furfanti e Cavalieri di Smullyan,…) • Rapporto fra Matematica e Linguaggio, Matematica e percezione esterna (Queneau, Buzzati…) • Mondi a un numero diverso di dimensioni

	(Flatlandia,…)

Se è vero che il pensiero umano possiede varie sfaccettature (di cui le discipline sono in qualche modo un riflesso) è anche innegabile che chi pensa è un'unica persona, chiamata a conoscere e integrare in sé linguaggi, modi e "mondi" diversi, così come hanno fatto vari scrittori cimentandosi nella trattazione letteraria di argomenti di matematica (basti citare i libri di A. Cerasoli o S. Bordiglione, oppure (Tahan, 1997) o (Guedj 2000)) od occupandosi di vite di matematici (ancora ricordiamo (Toti Rigatelli 1993) e (Casti, 1998)); oppure utilizzando tecniche matematiche e combinatorie all'interno del proprio lavoro (è il caso delle versioni 'matematiche' degli esercizi di stile di (Queneau 1983) o del racconto "I sette messaggeri"[28] da (Buzzati 2001)); oppure infine ancora proponendo *mondi matematici* coerenti (l'universo bidimensionale di *Flatlandia* in (Abbott 1999), ricco di metafore e riflessioni estremamente attuali su diversità, dogmatismo, razzismo, libertà,ecc.).

Da una tale ricchezza e varietà di lavori una equipe motivata di docenti può trarre spunti di enorme interesse e validità educativa per una didattica che si ponga davvero il compito di *educare le persone* e non semplicemente addestrare gli studenti all'uso corretto di tecniche giustapposte.

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

ABBOTT E. A. (1999), Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni, Milano, Adelphi.

AGAZZI E. & PALLADINO D. (1978), Le geometrie non euclidee, Milano, Est Mondadori

ARRIGHI G. (a cura e con introduzione di) (1974), Pier Maria Calandri. Tractato d'abbacho. Dal Codice Acq. E doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, Pisa, Domus Galileiana

BAGNI G. (a cura di) (2015), Progetto INNOVARE in Toscana, Tecnodid, Napoli, pp.177-246

BOTTAZZINI U., FREGUGLIA P. & TOTI RIGATELLI L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni Editore

BRUNER J. (2002), La fabbrica delle storie, Roma.Bari, Laterza.

BUZZATI D. (2001), Sessanta racconti, Milano, Oscar Mondadori

CASTI J.L. (1998), I cinque di Cambridge, Milano, Raffaello Cortina Editore

CATTABRINI U. & DI PAOLA V. (a cura di) (1997), Matematica e poesia: un tema difficile ?, Firenze, IRRSAE Toscana

CRESCI L. (1998), Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti, Padova, Franco Muzzio Editore

ENZENSBERGER H.M. (1997), Il mago dei numeri, Torino, Einaudi

FORMAN S.L., STEEN L.A. (2000), Making authentic mathematics work for all students. In Bessot, A., Ridgway, J. (eds), Education for Mathematics in the Workplace, Kluwer Acad.

FRANCI R. & TOTI RIGATELLI L. (1982), Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento, Quattro Venti, Urbino

GUEDJ D. (2000), Il Teorema del Pappagallo, Milano, Longanesi & C.

[28] Per un esempio di uso didattico di questo racconto si veda (UMI-CIIM 2001: 218-220) ripreso poi in una delle attività proposte nel Piano nazionale m@t.abel (www.scuolavalore.indire.it).

GUILLEN M. (1997), Le cinque equazioni che hanno cambiato il mondo, Milano, Longanesi

HARDY G.H. (1989), Apologia di un matematico, Milano, Garzanti

HILBERT D. (1970), Fondamenti della geometria, Milano, Feltrinelli.

HOFFMAN P. (2000), L'uomo che amava solo i numeri, Milano, Mondadori

PIOCHI B. (1984), II "Trattato" di Paolo dell'Abbaco, Annali Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, IX, 1, 21-40

PIOCHI B. (2005). Quale contributo della matematica per una educazione trasversale? e Alcune idee per una educazione matematica "trasversale". In F. Cambi e M. Piscitelli (a cura di), Complessità e narrazione. Paradigmi di trasversalità nell'insegnamento, Armando editore, Roma; pp. 115-128 e 248-255

PIOCHI B., BERARDONO I. & PICUCCI G. (2008). Statistica fra Matematica e Lingua straniera, Nuova Secondaria, XXV, 7 (15 marzo 2008); pp. 86-90 (a partire da quanto narrato in https://people.umass.edu/biep540w/pdf/Stephen%20Jay%20Gould.pdf)

PIOCHI B. (2011). Una certa idea di matematica. In AA.VV., Il senso dell'educazione matematica. Valorizzare valutando, Pitagora Ed., Bologna, pp. 79-90

PISCITELLI M., PIOCHI B., CHESI S., MUGNAI C. (2001), Idee per il curricolo verticale, Napoli, Tecnodid

QUENEAU R. (1983), Esercizi di stile, Torino, Einaudi.

TAHAN M. (1997), L'uomo che sapeva contare, Milano, Salani Editore

TOTI RIGATELLI L. (1993), Matematica sulle barricate, Firenze, Sansoni

TRUDEAU R. (1991), La rivoluzione non euclidea, Torino, Bollati Boringheri

UMI-CIIM (2001), Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica, Ischia, 15-17 Novembre 2001

WHITE A.M. (a cura di) (1993), Essays in Humanistic Mathematics, The Mathematics Association of America, Note 32

GIOCHIAMO CON I PUZZLE
FIGURE SIMILI ED EQUISCOMPOSIZIONE DI FIGURE PIANE

Fabio BRUNELLI e Fabiana FERRI
Firenze

Riassunto
Gli autori da diversi anni collaborano allo svolgimento del Rally Matematico Transalpino in Toscana. In questo contributo partono dall'analisi di un problema di geometria piana, recentemente assegnato nella gara, per passare ad alcune considerazioni sull'esagono regolare e in generale sulla metodologia dell'insegnamento della geometria. L'idea è quella di fornire materiali e riflessioni utili agli insegnanti per lavoro in classe, per la progettazione curricolare e per la formazione in servizio. Nella proposta è compreso un gioco geometrico (puzzle) proponibile a partire dai cinque anni.

Introduzione

Dal sito ufficiale dell'Associazione Rally Matematico Transalpino: "Il Rally Matematico Transalpino (RMT) è un confronto fra classi, dalla terza classe della scuola primaria al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica e si svolge in diversi paesi europei.
Il RMT propone agli allievi: di fare matematica nel risolvere problemi, di apprendere le regole elementari del dibattito scientifico nel discutere e risolvere le diverse soluzioni proposte, di sviluppare le loro capacità, oggi essenziali, di lavorare in gruppo nel farsi carico dell'intera responsabilità di una prova, di confrontarsi con altri compagni, di altre classi.
Per gli insegnanti, impegnati nelle diverse fasi, secondo la loro disponibilità, il RMT permette: di osservare gli allievi (i propri in occasione delle prove di allenamento o quelli di altre classi in occasione della gara ufficiale) in attività di risoluzione di problemi, di valutare le produzioni dei propri allievi e le loro capacità di organizzazione, di discutere le soluzioni e di utilizzarle ulteriormente in classe, d'introdurre elementi innovativi nel proprio insegnamento tramite scambi con colleghi e con l'apporto di problemi stimolanti, di far parte del gruppo di animatori e di partecipare così alla preparazione, alla discussione e alla scelta dei problemi, alla correzione collettiva degli elaborati, all'analisi delle soluzioni.

Il RMT propone delle prove di risoluzione di problemi per classi di otto categorie (come si è detto dalla terza elementare al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado).
Ciascuna prova consta di un certo numero di problemi, da 5 a 7 , per categoria, da risolvere in 50 minuti. Molti problemi sono comuni a diverse categorie. Sono scelti, in numero e grado di difficoltà, in modo che ogni allievo, indipendentemente dal suo livello, possa trovarvi il proprio ruolo e che l'insieme del compito sia globalmente troppo pesante per un solo individuo, per quanto capace e veloce sia.

È la classe intera che è responsabile delle risposte date. Gli allievi devono produrre una soluzione unica per ciascuno dei problemi. Non c'è solo la "risposta giusta" che conta, le soluzioni sono giudicate anche in base al rigore dei passaggi e alla chiarezza delle spiegazioni fornite."

Quest'anno 2017 la gara in Toscana ha interessato tutte le province per un totale di 1064 classi e oltre 23.000 alunni. La commissione di insegnanti volontari addetti alle correzioni, suddivisa in diverse sottocommissioni, ha letto e valutato 14.414 protocolli cartacei. E' proprio dal nostro lavoro di correzione che è nata l'idea di far conoscere ai colleghi alcune nostre riflessioni riguardo al problema in oggetto.

Il problema

14. Il tavolo triangolare (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2017 – 25° - II prova

Un tavolo di legno ha la forma di un triangolo equilatero. La sua superficie è composta da parti di legno scuro e da parti di legno chiaro. Le parti in legno scuro sono degli esagoni regolari e le parti di legno chiaro dei triangoli (come mostra la figura 1).

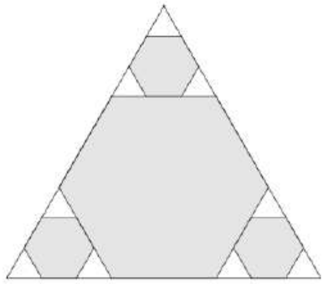


Figura 1

Giuseppe si è divertito a calcolare l'area dell'esagono grande che è di 4158 cm^2 e ora vuole calcolare l'area degli esagoni più piccoli.

Qual è, in cm^2, l'area totale dei tre esagoni piccoli?

Spiegate come l'avete trovata.

Analisi a priori del problema

Compito matematico

Determinare l'area della superficie di tre piccoli esagoni regolari uguali conoscendo l'area di un esagono regolare avente la lunghezza dei lati tripla di quella dei lati degli esagoni piccoli. Tutti gli esagoni sono all'interno di un triangolo equilatero.

Analisi del compito

- Rendersi conto che i tre triangoli piccoli che hanno un lato coincidente con un lato dell'esagono sono equilateri e uguali (ad esempio, osservare che ciascuno di loro ha tre angoli uguali: i lati dell'esagono regolare sono paralleli ai lati del triangolo grande e di conseguenza gli angoli di un triangolo piccolo sono uguali a quelli del triangolo grande che è equilatero; oppure si può anche considerarli come supplementari agli angoli degli esagoni regolari che sono di 120° ciascuno.
- Il lato dell'esagono grande è quindi 1/3 del lato del triangolo grande.
- Il triangolo grande si può dividere in 9 triangoli equilateri uguali (6 formati a partire dal centro dell'esagono e 3 nella parte rimanente).
- Conoscendo l'area dell'esagono, è possibile quindi calcolare l'area di uno di questi triangoli:

4158 : 6 = 693 (in cm^2).

Analogamente ciascuno di questi triangoli si può scomporre in 9 triangoli piccoli dei quali 6 formano l'esagono più piccolo: 693 : 9 = 77 (in cm^2).

L'area di un esagono piccolo è quindi 77 × 6 = 462 (in cm^2). Quella complessiva dei tre esagoni piccoli è quindi: 462 × 3= 1386 (in cm^2).

Oppure,

-osservare che ciascuno dei 9 triangoli può essere considerato composto da altri 9 triangoli piccoli, uguali tra loro. Quindi la superficie dell'esagono è formata da 54 triangoli piccoli di area 4158 : 54 = 77 (in cm^2). L'esagono piccolo ha quindi area 77 × 6 = 462 (in cm^2). I tre esagoni, complessivamente, hanno allora area 462 × 3 = 1386 (in cm^2).

Oppure,

- rendersi conto che si possono inserire 7 esagoni nell'esagono grande e che restano 12 triangoli equilateri piccoli che possono formare ancora due esagoni. L'area dell'esagono grande è quindi uguale a quella di 9 esagoni piccoli, questo implica che un esagono piccolo ha un'area di 462 cm² (4158/9). Resta da moltiplicare questo numero per 3 per ottenere la risposta.
-considerare che, essendo il lato di ciascun esagono piccolo pari a 1/3 di quello dell'esagono grande, l'area di ogni esagono piccolo sarà 1/9 di quella dell'esagono grande, cioè 1/9 di 4158 (in cm^2) e dunque 462 (in cm^2).
I tre esagoni, complessivamente, avranno area 462 × 3 = 1386 (in cm^2).
Oppure,
-è possibile trovare il risultato esatto (1386 cm^2) a partire dalla formula dell'area dell'esagono che fa intervenire dei radicali,che possono però condurre a risultati approssimati (per es. 1385 cm^2) se vengono sostituiti con numeri decimali.

Attribuzione dei punteggi

4 punti: Risposta corretta (1386 cm^2) con spiegazioni chiare e complete della procedura seguita.
3 punti: Risposta corretta con spiegazioni parziali (per esempio, non si precisa che i triangoli sono equilateri e uguali);
oppure risposta 1385 cm^2 per l'approssimazione nei calcoli, con spiegazioni chiare e complete della procedura seguita;
oppure risposta 462 cm^2 (calcolo dell'area di un solo esagono piccolo) con spiegazioni chiare e complete.
2 punti: Procedimento corretto con errori di calcolo ma con spiegazioni chiare e complete
oppure risposta 461 cm^2 (area di un solo esagono piccolo) per l'approssimazione nei calcoli, con spiegazioni chiare e complete;
oppure risposta corretta senza spiegazioni.
1 punto: Inizio di ricerca coerente (ad esempio, divisione dell'esagono in 6 triangoli equilateri uguali e calcolo della loro area);
oppure risposta ottenuta utilizzando delle misure per trovare che il lato dell'esagono grande è un terzo del lato del triangolo grande.
0 punti: Incomprensione del problema.
Livello scolastico a cui il problema è rivolto: 7, 8, 9, 10
Origine: Puglia

I risultati

In occasione della seconda prova del RMT 2017 in Toscana il nostro problema è stato affrontato da classi delle categorie 7, 8, 9, 10 (dalla classe seconda della scuola secondaria di primo grado alla classe seconda della scuola secondaria di secondo grado). Questi sono i risultati suddivisi per categorie nella Tabella 1:

Categoria 7						
Punteggi	0	1	2	3	4	Totale classi
Numero di classi che hanno ottenuto un certo punteggio	60	24	13	99	51	247

Tabella 1

Sommando le classi con punteggio 3 e 4 otteniamo che circa il 61% delle classi di questa categoria ha lavorato in modo soddisfacente (Tabella 2).

Categoria 8						
Punteggi	0	1	2	3	4	Totale classi
Numero di classi che hanno ottenuto un certo punteggio	21	22	10	35	85	173

Tabella 2

Sommando le classi con punteggio 3 e 4 otteniamo che circa il 69% delle classi di questa categoria ha lavorato in modo soddisfacente (Tabella 3).

Categoria 9						
Punteggi	0	1	2	3	4	Totale classi
Numero di classi che hanno ottenuto un certo punteggio	7	7	1	7	22	44

Tabella 3

Sommando le classi con punteggio 3 e 4 otteniamo che circa il 66% delle classi di questa categoria ha lavorato in modo soddisfacente (Tabella 4).

Categoria 10						
Punteggi	0	1	2	3	4	Totale classi
Numero di classi che hanno ottenuto un certo punteggio	5	3	5	7	19	39

Tabella 4

Sommando le classi con punteggio 3 e 4 otteniamo che circa il 67% delle classi di categoria 10 ha lavorato in modo soddisfacente.
Una conclusione che possiamo trarre da questi risultati considerati nel complesso è che la maggior parte delle classi ha lavorato positivamente e che il problema si è dimostrato di media difficoltà. Solo poco più del 18% delle classe ha mostrato totale incomprensione del problema. Stupisce sempre constatare ancora una volta che i risultati non migliorano significativamente con il crescere dell'età degli alunni, almeno nella fascia di età da noi considerata. E' come se le l'insegnamento scolastico non riesca a incrementare più di tanto le competenze di "problem solving" degli allievi.

Esame di alcuni protocolli significativi

Iniziamo da alcuni protocolli errati: "Per prima cosa abbiamo trovato il lato dell'esagono, dividendo l'area per tre 4158 : 3 = 1386 cm. Poi lo abbiamo diviso per tre ed è venuto 462 cm e ridividendolo per tre abbiamo trovato il lato dell'esagono 154 cm. Sapendo il lato dell'esagono e moltiplicandolo per se stesso è venuto 23.716 cm^2,ovvero l'area dell'esagono piccolo. Moltiplicando 23.716 cm^2 per tre abbiamo trovato l'area complessiva dei tre triangoli." Abbiamo letto e riletto questo protocollo per essere sicuri di quello che veramente c'era scritto. Gli errori sono molti. Colpisce la disinvoltura di usare la divisione per passare dall'area al lato (errore peraltro classico). E ancora di trovare l'area dell'esagono moltiplicando il lato per se stesso come fosse un quadrato. Infine la mancanza di controllo sui risultati, l'esagono piccolo risulterebbe quasi sei volte più grande dell'esagono grande!

Questo secondo protocollo assomiglia molto al primo (con la solita mancanza di controllo numerico): "Ecco il nostro procedimento, abbiamo iniziato dividendo l'area
4158 : 6 = 693 cm (lato dell'esagono regolare)
693 : 3 = 231 (lato dell'esagono minore)
231 · 6 = 1386 cm^2 (area esagono piccolo)
1386 · 3 = 4158 cm^2 (area totale dei tre esagoni piccoli)

Consideriamo un terzo protocollo errato di terza media: "Abbiamo trovato il lato usando il numero fisso, poi abbiamo impostato la proporzione, grazie alla quale abbiamo ricavato l'area di un esagono piccolo, dopodiché l'abbiamo moltiplicato per tre":

l = $\sqrt{\frac{4158 \cdot 2}{6 \cdot 0,866}}$ = 40 cm [qui hanno arrotondato]

40 : 4158 = 13,3 : x

x = $\frac{13,3 \cdot 4158}{40}$ = 1382,5 cm^2 [anche qui hanno arrotondato]

Esagoni piccoli = 3 · 1382,5 = 4147,5 cm^2

La prima osservazione che potremmo fare è che non si tratta di alunni di livello basso. Si ricordano che all'area dell'esagono è associato un (maledetto) "numero fisso" e riescono a impostare la "formula inversa" che fornisce il lato dell'esagono a partire dall'area. Inoltre padroneggiano le proporzioni, eseguono arrotondamenti e riescono a spiegare correttamente in lingua italiana il loro procedimento. Forse un loro errore è stato quello di voler passare attraverso il lato dell'esagono. L'impressione che danno è di avere avuto una formazione matematica basata più su regole e procedimenti da applicare che non sulla intuizione e la fantasia.

Passiamo a qualche protocollo corretto:
"Abbiamo notato che l'esagono grande se diviso per sei parti formava altrettanti triangoli [equilateri] uguali a quelli formati agli angoli della figura (composti da tre triangoli equilateri piccoli e da un esagono piccolo) trovando così l'area di ogni triangolo all'interno del tavolo. Poi abbiamo ridiviso l'area di ogni triangolo interno all'esagono grande (trovando 77 cm^2 che è l'area di ogni triangolo piccolo). In seguito abbiamo ridiviso gli esagoni piccoli nello stesso modo in cui abbiamo suddiviso l'esagono grande notando così che era composto da sei triangoli piccoli. Perciò abbiamo moltiplicato l'area di un singolo triangolo piccolo per sei trovando l'area di un unico esagono piccolo che abbiamo moltiplicato per tre, trovando l'area dei tre esagoni piccoli."
A questo discorso seguono i calcoli corretti e una figura esplicativa (Figura 2)

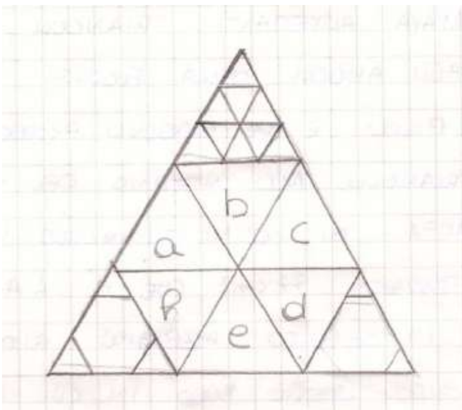


Figura 2

In questo protocollo gli allievi hanno fatto abbondante uso di ritaglio e di disegno. Quando affrontano questi problemi gli alunni hanno a disposizione molte copie cartacee del testo, matite, forbici, colla, … e sono sollecitati dall'insegnante ad usare tutti gli strumenti possibili. Non tutti lo fanno. Per molti resta una sorta di soggezione del foglio che in qualche modo "non andrebbe violato". La stessa soggezione si osserva correggendo i fascicoli Invalsi, sui quali i ragazzi sono liberi di scrivere e disegnare e appaiono invece, nella maggior parte dei casi, immacolati.

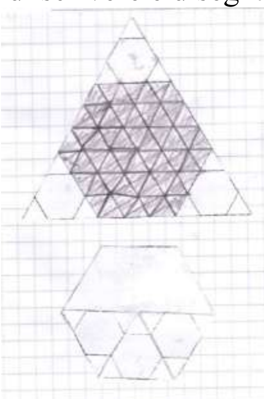


Figura 3

"Abbiamo calcolato quanti triangolini c'erano nell'intero esagono (54). Per trovare l'area di un triangolino abbiamo diviso l'area totale per il numero dei triangolini $\frac{4158}{54}$ = 77 cm^2. Abbiamo poi visto che in metà esagono c'erano nove triangolini, quindi abbiamo trovato l'area di metà esagono $\frac{4158}{2}$ = 2079 cm^2. Abbiamo poi trovato l'area di tre esagoni sottraendo l'area di nove triangolini che si trovano in metà esagono 2079 – 9 · 77 = 2079 – 693 = 1386. Poi per trovare l'area di un esagono l'abbiamo divisa per tre $\frac{1386}{3}$ = 462 cm^2" (Figura 3).

Questo è un disegno ritagliato e poi incollato sul protocollo: "Abbiamo anche notato che sei triangoli formano l'esagono [grande] quindi in mezzo esagono [grande] vi sono tre esagoni [piccoli] e mezzo quindi per trovare l'area di un esagono abbiamo diviso l'area di metà esagono [grande] per il numero degli esagoni [piccoli] cioè $\frac{2079}{4,5} = 462\ cm^2$" (Figura 4).

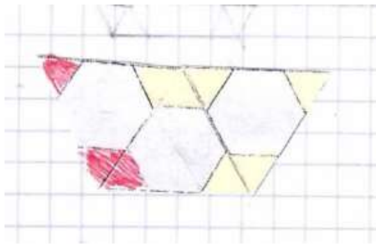


Figura 4

Ancora un protocollo di terza media:

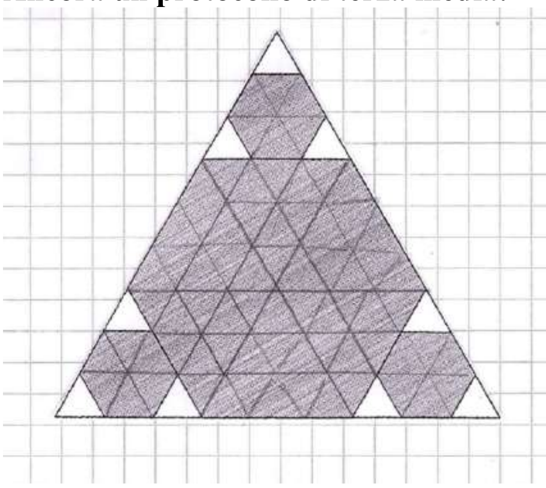


Figura 5

"Visto che l'esagono grande è formato da sei triangoli equilateri, abbiamo suddiviso anche i triangoli in triangoli più piccoli come dimostrato in figura. Ogni triangolo è formato da nove triangoli più piccoli, quindi l'esagono è formato da $6 \cdot 9 = 54$ triangolini. Abbiamo preso l'area dell'esagono grande e abbiamo trovato l'area dei triangolini. In questo modo $4158 : 54 = 77\ cm^2$. Quindi l'esagono più piccolo, essendo formato da sei di questi triangolini, la sua area è $77 \cdot 6 = 462\ cm^2$. Quindi l'area totale richiesta è $462 \cdot 3 = 1386\ cm^2$" (Figura 5).

Un altro protocollo che ha ottenuto il punteggio pieno:

"Per trovare l'area dei tre esagoni piccoli abbiamo fatto $4158\ cm^2 : 54$ (numero dei triangolini interni all'esagono grande) $= 77\ cm^2$ (area di un triangolino).
27 (numero totale che compongono i triangoli esterni) - 9 (triangolini bianchi) = 18 (triangolini in totale che compongono gli esagoni piccoli).
$77 \cdot 18 = 1386\ cm^2$ (area totale dei tre esagoni piccoli)
Osserva il nostro modello (Figura 6).

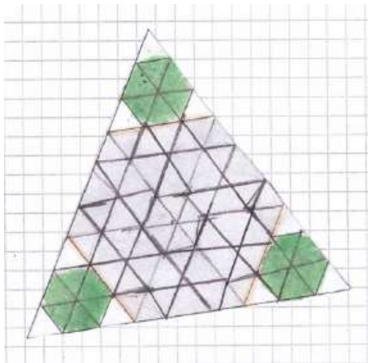


Figura 6

Ecco cosa hanno scritto degli alunni bravi, che hanno riconosciuto il concetto di similitudine, anche se non lo hanno esplicitato teoricamente:

"L'area totale dei tre esagoni piccoli è $1386\ cm^2$. L'abbiamo trovato dato che il lato dell'esagono piccolo è 1/3 del lato dell'esagono grande, quindi l'area dell'esagono piccolo è 1/9 di quella dell'esagono grande, quindi $4158\ cm^2 : 9 = 462\ cm^2$. In fine $462 \cdot 3 = 1386\ cm^2$.

Esagono regolare, digressioni

E' proprio vero che quando si riflette su un concetto matematico si finisce per vederlo dappertutto. A noi è successo un po' questo: per settimane, durante la scrittura (intermittente) di questo articolo, ci siamo sentiti letteralmente assediati dagli esagoni (Figura 7):

Figura 7 pubblicità in quotidiano.

Consideriamo i poligoni regolari: il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, eccetera. Ci sono due problemi che possiamo porci con queste figure:
1) Pavimentare il piano
2) Costruire poliedri regolari
I problemi possono essere esplorati teoricamente, oppure anche praticamente, manipolando modellini di plastica o cartoncino. Gli esagoni li abbiamo visti in mano ai nostri alunni nel laboratorio "Poligoni in pezzi" a Pisa. Da qualche anno infatti sono attivi alcuni Laboratori Didattico Scientifici, ospitati in questo momento dall'Istituto Santoni, in via Italo Possenti, 20. Sono stati inaugurati nel maggio 2007 e promossi dall`Assessorato alla PI della Provincia di Pisa come risorsa presente sul territorio, con la finalità di migliorare l`insegnamento apprendimento in ambito scientifico e il rinnovamento delle metodologie didattiche (Figura 8).

Figura 8 Ornella Sebellin Pallottino con alcuni ragazzi in visita ai Laboratori Franco Conti.

I laboratori sono intitolati a Franco Conti, docente della Scuola Normale, prematuramente scomparso, didatta appassionato e straordinario divulgatore della matematica e della fisica.
Il Laboratorio "Franco Conti" propone un modo diverso di introdurre la geometria solida, partendo dall'osservazione e dalla manipolazione degli oggetti. Inaspettatamente, il loro essere scomposti in "pezzi" rivela nuove proprietà e ne fa riscoprire altre già note.
Inoltre, la necessità di disegnarli e di costruirli permette di consolidare la loro conoscenza e di fare nuove scoperte attraverso l'utilizzo operativo di competenze acquisite da tempo. Questo lavoro, fatto a più mani, nato da tanti incontri fra colleghi di scuole diverse, sperimentato con le classi che vengono a visitare il Laboratorio, vuole essere un piccolo esempio di ricercazione, nell'ottica di un insegnamento laboratoriale che avvicini con piacere i ragazzi allo studio della matematica, giustificando ai loro occhi la necessità di calcolare, verificare e infine dimostrare, ritrovando il piacere di fare e di far fare geometria.

Ecco qualche esempio di pavimentazione presa dalla realtà. Se l'ottagono regolare non riesce da solo a pavimentare il piano può sempre chiedere aiuto al suo amico quadrato (Figura 9 e 10).

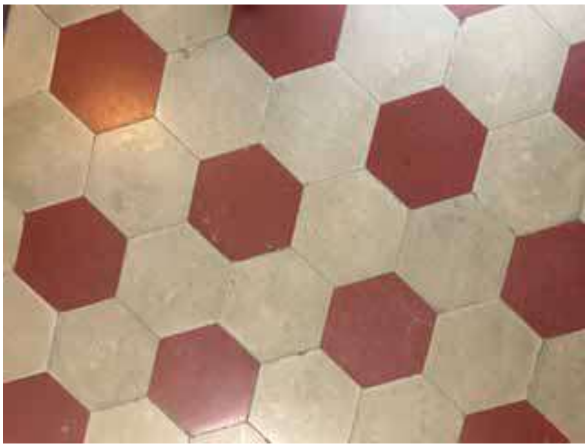


Fig. 9 Monza, Liceo Artistico Statale della Villa Reale, pavimento del corridoio.

Fig. 10 Monza, Villa Reale, pavimento di una stanza del primo piano.

Dal diario di Fabio: "Sabato 3 giugno sono stato a Roma con mia moglie Bice. Siamo passati per caso davanti alla Basilica di San Clemente, eravamo leggermente in anticipo sul nostro programma e siamo entrati spinti dalla curiosità; ecco qualche particolare dei pavimenti" (Figure 11, 12, 13):

Figure 11, 12, 13 Roma, Basilica di San Clemente, particolari del pavimento cosmatesco, XII secolo.

Un problema difficile

Nelle ultime Olimpiadi di Matematica a Cesenatico, nel maggio 2017, è stato assegnato il seguente problema:

"Let a and b be positive real numbers. Consider a regular hexagon of side a, and build externally on its sides six rectangles of sides $a$and b. The new twelve vertices lie on a circle. Now repeat the same construction, but this time exchanging the roles of $a$and b; namely; we start with a regular hexagon of side $b$and we build externally on its sides six rectangles of sides $a$and b. The new twelve vertices lie on another circle. Show that the two circles have the same radius."

Ecco la dimostrazione di Bernardo Tarini (medaglia d'oro):

Sia O il centro dell'esagono di lato a (per via della simmetria centrale della configurazione O sarà anche centro del dodecagono).

Sia AB uno dei lati dell'esagono e ABCD uno dei rettangolini che hanno un lato in comune con l'esagono e l'altro lato lungo b.

Sia E la proiezione di O su AB e F la proiezione di O su DC.

Per il Teorema di Pitagora il raggio della circonferenza circoscritta al dodecagono è:

OD = sqrt(DF^2+FO^2) = sqrt((a/2)^2+(FE+EO)^2) = sqrt(a^2/4+(b+sqrt(3)a/2)^2) = sqrt(a^2+b^2+sqrt(3)ab) dove, per calcolare OE, abbiamo utilizzato il fatto che è altezza del triangolo equilatero AOB di lato a. Poiché l'espressione di OD in funzione di a e b è simmetrica in a e b, scambiando queste due grandezze la sua lunghezza rimarrà invariata (Figura 14).

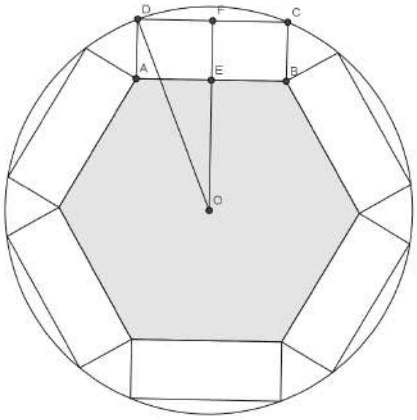


Figura 14 Problema risolto da Bernardo Tarini.

Chissà se coloro che hanno formulato il problema dell'esagono delle ultime olimpiadi non si siano ispirati al pavimento di San Clemente in Roma? La situazione è un po' diversa: invece che dei rettangoli di lati a e b qui sui lati di un esagono centrale sono stati aggiunti quadrati con il lato uguale a quello dell'esagono.
Inoltre qui la figura non è inscritta in un cerchio bensì circondata da un dodecagono regolare.
Il centro del dodecagono anche in questo caso coincide con il centro dell'esagono di partenza (Figura 15).

Figura 15

Un esagono inaspettato dall'astronomia

In questi giorni abbiamo letto questo articolo di Giovanni Caprara sul Corriere della Sera:
"Il mistero dell'esagono di Saturno grande 30 mila km. Si trova nel polo nord del pianeta e cambia colore ogni 7 anni, passando dai toni azzurri a quelli dorati. Le fotografie trasmesse dalla sonda Cassini della Nasa. Da Juno i cicloni di Giove.
Un mistero impenetrabile regna nel polo nord di Saturno. Le fotografie trasmesse dalla sonda Cassini della Nasa mostrano un imponente esagono avvistato diversi anni fa, apparentemente indistruttibile e la cui origine rimane ignota. Le ultime osservazioni decifrano almeno una sua caratteristica: ogni sette anni cambia colore passando dai toni azzurri a quelli dorati. Adesso la sonda è impegnata nell'aggredire il mistero della causa generatrice della grande forma geometrica troneggiante sulla calotta approfittando del fatto che il polo nord raggiunge il solstizio d'estate e la luce del Sole illumina bene in profondità la coltre nuvolosa Figura 16).

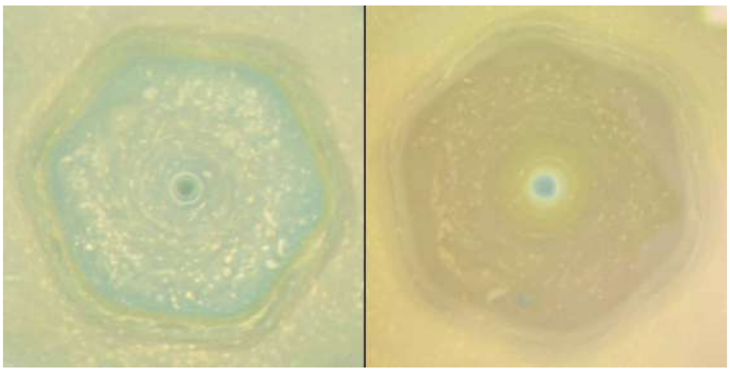


Figura 16

L’esagono è una gigantesca manifestazione atmosferica: una corrente a getto che sfreccia alla velocità di 322 chilometri orari attorno a un grande ciclone centrale. Tra i suoi confini contiene una miriade di altri vortici ciclonici estesi fino a 3.500 chilometri, circa il doppio dei più grandi cicloni terrestri. Non esiste nulla di simile nel sistema solare; ma che cosa lo sprigioni e come mai si mantenga nel tempo fluttuando come un inquietante serpente, resta un segreto da trent’anni. Tante sono le ipotesi avanzate mentre si spera di trovare risposta negli ultimi sorvoli di Cassini prima della sua fine di settembre. Il diametro dell’esagono è di 30 mila chilometri e si incunea in profondità per cento chilometri. Ognuno dei lati è più grande della Terra.
La sua esistenza era stata scoperta dalla sonda Voyager della Nasa negli anni Ottanta. Poi sono stati mobilitati il telescopio spaziale Hubble e la sonda Cassini. Gli ultimi dati confermano che il serpente aereo esagonale cambia colore ogni sette anni passando dalle tonalità azzurre a quelle dorate di oggi. Per trovare spiegazione si è riprodotto in laboratorio il fenomeno e sembra che l’alta velocità unita a una particolare viscosità dei gas possa generare le strane geometrie. Cassini ha permesso qualche timido passo avanti rivelando che la corrente esagonale funziona come un impenetrabile muro per le particelle atmosferiche. Resta l’enigma della persistenza.

Il laboratorio di matematica

Cosa è un “laboratorio di matematica”? Ognuno oggi risponde come vuole a questa domanda e forse è anche bene che sia così. Una cosa è certa. Le scuole italiane stanno spendendo cifre a volte considerevoli (Fondi PON) per attrezzarsi con qualcosa di simile a quello che si vede in queste due foto (scattate da noi in Toscana in queste settimane, Figura 17):

Figura 17

Qualche volta sono stati i dirigenti scolastici che ci hanno mostrato queste stanze con orgoglio e soddisfazione. In effetti gli Orientamenti prevedono che il laboratorio possa anche essere un luogo attrezzato, tuttavia dedicano particolare enfasi ad una seconda accezione della parola: “In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico, sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.”
A nostro parere troppi insegnanti ritengono che sia sufficiente sostituire la lezione tradizionale con un video, una canzone, un’attività di ritaglio o piegatura della carta, un gioco di qualunque tipo, per realizzare un’attività laboratoriale. Una didattica vecchia e dei contenuti obsoleti o pasticciati non traggono grande giovamento da un tavolo esagonale, da sedie ergonomiche, da una LIM superconnessa in rete. Sono invece a nostro parere fondamentali le espressioni delle Indicazioni “alunno attivo”, “formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze”. In altre parole a nostro parere il laboratorio deve essere caratterizzato da una vera attività di problem solving matematico. Gli alunni non devono sapere prima se occorre sommare o sottrarre, non devono sapere se il problema è additivo o proporzionale, non devono sapere se utilizzare il Teorema di Pitagora o il concetto di similitudine. Gli alunni devono potersi trovare davanti ad una momentanea difficoltà e interrogarsi. Occorre anche dare loro tempo e possibilità di confronto e infine rispondere alle loro domande e richieste di aiuto con ulteriori domande mirate.

Un convegno in Belgio

Ci siamo ritrovati in Belgio nell’ottobre 2017 per il Convegno Annuale del Rally Matematico

Transalpino che si tiene ogni anno in una differente città europea. La pianta di Charleroi, la città industriale che ci ha ospitato a 60 chilometri da Bruxelles, ci ha subito colpito (Figura 18).
La pianta esagonale del centro storico di Charleroi è legata alle sue origini militari. La città infatti ebbe origine da un piccolo villaggio chiamato Charnoy. Successivamente, nel 1666, gli Spagnoli vi edificarono una fortezza, che fu chiamata Charles Roy (Rey Carlos) in onore del re Carlo II di Spagna.

Figura 18

Riflettendo ancora sulla nostra figura nella Place Charles II di Charleroi insieme a Fabiana Ferri, docente della scuola primaria, abbiamo avuto l'idea di progettare un gioco geometrico tipo puzzle da proporre ad allievi più giovani. Il modello è stato costruito con cartoncino plastificato, le figure piccole da maneggiare e sovrapporre in materiale plastico colorato (figura 19). La consegna del puzzle è stata: cercare di ricoprire l'esagono grande (grigio) con gli esagoni piccoli (verdi), avendo a disposizione pezzi di diverse forme.

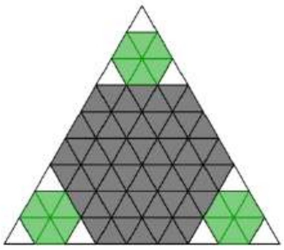


Figura 19

Abbiamo sperimentato il gioco in una classe prima di scuola primaria, nel primo quadrimestre (venticinque alunni), presentando collettivamente il puzzle e chiedendo ai bambini cosa vedevano nell'immagine (Fig. 19).
In realtà noi avremmo voluto chiedere quali figure geometriche riconoscevano nell'immagine, ma i bambini, lavorando di fantasia, hanno fornito risposte più ampie, facendo riferimento alla realtà del loro vissuto.
Maestra: "Bambini, cosa vedete in questa figura?"
Risposte dei bambini:
Una montagna
Un triangolo [grande]
Una tartaruga con le zampe davanti rientrate nel guscio
Una piramide
Una pittura
Un rombo [indica un esagono piccolo]
Un contorno [indica quello dell'esagono grande]
Un diamante [toccando l'esagono piccolo verde]
Dei triangoli [piccoli] bianchi
Un triangolo [piccolo] grigio a punta in su e uno a punta in giù
Delle foglie che cadono su un guscio

Una farfalla [notturna] con le ali chiuse
Una montagna con tre alberi verdi [non è riuscito ad esprimere se la visione era dall'alto o di fronte]
Uno zaino triangolare
Una faccia triangolare
Un cono del gelato
Una fetta di pizza
Un cappello di strega
Una punta di un razzo

Abbiamo poi iniziato a sperimentare il gioco in gruppi di quattro bambini.
Alla domanda "Con le forme verdi piccole si può ricoprire la superficie della figura grigia grande?" I bambini hanno avuto difficoltà:
a comprendere cosa significasse "discutere tra loro". In certi momenti smontavano il lavoro fatto dai compagni per costruire il proprio, avendo bisogno di pezzi;
a comprendere la consegna stessa, in vero ambigua per il loro livello di conoscenze. Usavano solo gli esagoni piccoli interi. Solo dopo aver fatto loro notare che gli spazi vuoti della superficie grigia potevano essere ricoperti con altre forme, hanno scelto anche i triangoli piccoli per farlo.
In seguito, ulteriormente sollecitati hanno compreso che potevano formare esagoni usando forme diverse (triangoli piccoli e trapezi isosceli, foto 20).

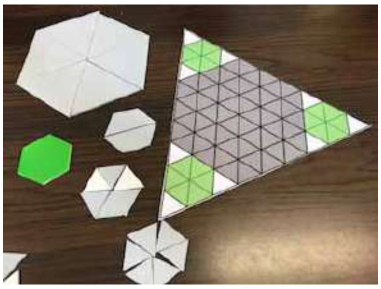


Foto 20

Formulando ancora la domanda iniziale hanno contato gli esagoni interi e gli esagoni in pezzi arrivando alla corretta risposta di nove.
Nel gruppo 1, formato da quattro bambini, solo due erano interessati a portare a termine il compito. Un terzo ascoltava senza attivarsi, il quarto si isolava completamente, giocando da solo con alcuni pezzi del puzzle (foto 21).

Foto 21

Gruppo 2: nessuno conosce il significato del termine "ricoprire" in senso geometrico o perlomeno prevale il significato linguistico generico del termine. Due elementi del gruppo risultano distrattori per se e per gli altri e impediscono la concentrazione e il ragionamento nel gruppo. Per questi motivi non arrivano alla soluzione, non comprendendo che con i triangoli piccoli si possono formare esagoni interi.

Gruppo 3: con questo gruppo l'approccio è stato diverso: viene presentato subito l'esagono come forma geometrica di sei lati e sei angoli. I bambini riconoscono che la figura grigia grande ha la stessa forma di quella piccola verde. Riescono inizialmente a lavorare insieme e ricoprire l'esagono grande con esagoni piccoli e triangoli. Anche loro non comprendono che con i triangoli piccoli possono comporre esagoni piccoli. Arrivano con fatica alla soluzione solo dopo avere sgombrato il puzzle dagli esagoni interi e guidati dall'insegnante.
Con il gruppo quattro e cinque abbiamo cambiato modalità di approccio. Attraverso similitudini (esagono come forma della cella dell'alveare, faccia di un diamante, …) abbiamo subito presentato l'esagono, suggerendo che per ricoprire quello grande si potevano utilizzare pezzi differenti. Così guidati i bambini sono arrivati alla soluzione, ma anche loro hanno dimostrato le stesse difficoltà generali dei compagni (foto 21).

Foto 21

Ci siamo resi conto che da un punto di vista strettamente matematico la richiesta iniziale era troppo alta per la loro età. Tuttavia, semplificando il comando, i bambini hanno raggiunto diversi traguardi, che sono stati osservati nei giorni seguenti lavorando in altri ambiti:

- Hanno migliorato il loro modo di lavorare insieme;
- Hanno potenziato le loro capacità di ascolto;
- Si sono interessati - appassionati all'approccio manipolativo ai problemi.

Conclusioni

Vorremmo concludere con una famosa citazione di Francesco Severi del 1919: "… Bisogna che nei primi gradi delle scuole (elementari e medie) l'insegnamento della matematica sia esclusivamente intuitivo. Col taglio della carta, coi modelli [fisici, manipolabili] e con mille altri accorgimenti di cui si trovano esempi nei libri di testo inglesi, bisogna suscitare la "curiosità" degli allievi. Specialmente la geometria si dovrà considerarla, in questa fase, come una vera e propria scienza fisica.
Resterà quel che resterà; ma intanto il grosso della scolaresca non sarà stato ributtato da difficoltà insormontabili fin dalle prime lezioni ed avrà almeno imparato quel tanto che era possibile …"
Abbiamo l'impressione che a distanza di cento anni dalle affermazioni di Francesco Severi alla scuola italiana resti ancora molto cammino da fare.

Bibliografia

A cura di L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi, RMT: potenzialità per la classe e la formazione, Pitagora Editrice Bologna, Atti delle giornate di studio Parma 2001 – 2002.

EDUCAZIONE NON VIOLENTA PER LA FORMAZIONE E L'AUTONOMIA DI ALLIEVI E INSEGNANTI

Chiara CATENI[1] e Francesca RICCI[2]

[1] Vicepresidente Nazionale Grimed, Docente di scuola secondaria di I grado, Counselor psicosintetista (TN)

[2] Responsabile Laboratorio Educazione Matematica, Università di Siena (SI)

Non esiste nulla di più idealistico e poetico,
nulla di più radicale, sovversivo e psichedelico della matematica.
Paul Lockart

La matematica può senza dubbio provocare stupore e meraviglia, ma può essere anche fonte di sofferenza e frustrazione. Il fatto di avere difficoltà in matematica viene associato alla mancanza di intelligenza, come se l'unico modo per risolvere un problema matematico fosse quello di avere avuto in dono una mente "portata per la matematica". Ovviamente queste credenze non fanno altro che alimentare la sensazione di impotenza di fronte a un compito e incidono enormemente sul senso di autostima personale. Al punto che, se un allievo è bravo in matematica, facilmente avrà buoni risultati anche nelle altre materie: essere considerato intelligente favorisce una maggiore autostima e l'innescarsi di circoli virtuosi, sostenuti e motivati dal provare gratificazione.

A tutti gli altri è precluso sicuramente il piacere di affrontare una sfida, di cercare la soluzione del problema per il desiderio di conoscere la risposta, per quel brivido di emozione che si prova nel momento della scoperta, ma anche il piacere di sentirsi perlomeno adeguati, all'altezza, parte del gruppo.

Per alcuni la matematica è un vero mostro. Agata, una bambina di terza elementare disegna la pagina di matematica come un gigante dall'enorme bocca spalancata, che la insegue, mentre lei, pur sorridendo, cerca di darsela a gambe (fig.1).

Fig.1: Agata e la matematica

Purtroppo non sono rari i casi di disaffezione nei confronti della matematica, di impotenza, di difficoltà, che non vengono mai sanati e che portano da adulti a pronunciare la fatidica frase: "Eh no, io non ho mai capito niente in matematica". Il fatto che, talvolta, sia pronunciata con un certo orgoglio serve a nascondere il disagio di percepirsi "non all'altezza".

Se queste situazioni sono note a tutti, non lo sono altrettanto i rimedi: cosa può fare la scuola per aiutare i giovani a realizzare pienamente le loro potenzialità?

Lungi dal pensare di avere in mano la soluzione, ci siamo incamminate sulla strada impervia dell'osservazione e della sperimentazione, dolorosamente consapevoli di trovarci di fronte a ragazzi in formazione, persone con emozioni e sentimenti forti e ancora poco controllati.

Idriss Aberkane (francese, nato nel 1986, neuroscienziato, biologo e molto altro) paragona l'istruzione dei paesi industrializzati a un buffet traboccante di piatti raffinati e appetitosi. Siamo lì, in piedi, di fronte a tutto questo bendidio, e abbiamo appetito, anzi sentiamo proprio fame, abbiamo una gran voglia di mangiare. Ma ecco che si avvicina il maître d'hotel e ci comunica in tono perentorio che dobbiamo mangiare tutto. Sì, proprio tutto, pena l'addebito di tutti gli avanzi! Ma c'è di più: abbiamo un tempo stabilito per farlo, oltre il quale non possiamo sforare. Stabilito da chi? Da quelli che ci sono riusciti prima di noi ovviamente. Ecco che un bel pasto, gustoso e prelibato, si trasforma immediatamente in un'esperienza terrificante e nauseabonda.

«L'istruzione» dice Aberkane «ci prepara alla società, e più la preparazione sarà violenta, stressante, dolorosa, frustrante e competitiva, più la società esprimerà a sua volta la violenza, lo stress, il dolore, la frustrazione e l'individualismo».

In una scuola così, dove gli studenti vengono ingozzati come polli d'allevamento, spesso sono gli insegnanti stessi a soffrire, mentre i ragazzi ne fanno le spese, in una spirale che si autoalimenta.

L'immagine che abbiamo davanti agli occhi ci paralizza, ma subito ci vengono in mente le parole di Freire (pedagogista brasiliano): «Quando entro in aula devo diventare un essere aperto all'osservazione e alla ricerca, alla curiosità, alle domande degli alunni, alle loro inibizioni; un essere critico e indagatore, inquieto davanti al compito che ho - *quello di insegnare e non di trasferire conoscenze*». L'insegnante, l'educatore, deve sempre essere attento al rispetto dell'autonomia e dell'identità dell'allievo, perché questo è il rispetto che deve nutrire verso se stesso. La scuola forma e educa e l'educazione non si limita al sapere, la cultura non è una prestazione alla quale si può mettere un voto, la valutazione è un castigo o un premio e stimola a rendere, a restituire, non a dare: per questo rappresenta un limite all'autonomia dell'individuo in formazione. La cultura è un piacere e si possono creare le condizioni perché si realizzi stimolando la curiosità, suscitando l'interesse e promuovendo il benessere. Tutti coloro che eccellono in qualcosa sono profondamente innamorati della cosa in cui eccellono, perché l'amore è la molla più efficace che ci spinge a superare gli ostacoli, perseverare nell'esercizio, stringere i denti fino a raggiungere l'obiettivo: ne sono un esempio i campioni in campo sportivo, i musicisti, gli artisti e chiunque appaia ai nostri occhi come una persona realizzata.

L'amore dunque, la motivazione, ma anche l'autostima: il nostro cervello tende ad assecondare ciò che pensa di se stesso, così se crediamo di non essere in grado di eseguire un compito avremo maggiori probabilità di fallire. E quando il fallimento è reiterato incorriamo nell'impotenza appresa. Martin Seligman, fondatore della psicologia positiva, è stato il primo a descrivere questo fenomeno, vi è incappato durante i suoi esperimenti con i cani e ha avuto la prontezza di riconoscerlo, ampliando i suoi studi ed estendendoli agli esseri umani. Da quel momento gli esperimenti in proposito si sono moltiplicati, adesso sappiamo che l'impotenza appresa può impedirci di svolgere anche compiti semplici ed è estremamente difficile da superare.

Un esempio immediato e facilmente comprensibile ce lo fornisce Charisse Nixon (https://www.youtube.com/watch?v=gFmFOmprTt0) che sottopone a una classe di studenti un compito piuttosto semplice: trovare gli anagrammi di tre parole. Metà della classe riceve un foglio con parole facilmente anagrammabili, all'altra metà sono proposte due parole, le prime, impossibili da anagrammare e una terza possibile. Quando questi ultimi si accorgono che l'altra metà della classe riesce bene e velocemente nei primi due esercizi, mentre loro non riescono a portarli a termine, si abbattono a tal punto da non riuscire a risolvere nemmeno il terzo, anche se in un'altra situazione ne sarebbero stati capaci. Il nostro cervello fa pesare i fallimenti passati sui nostri tentativi futuri, ci abbattiamo, siamo delusi, frustrati e costruiamo muri.

Come Carolina (Fig.2) che dalla prima elementare alla prima media passa, seppur gradualmente, dall'amore per la matematica alla negazione assoluta di ogni possibile contatto: «Io e la matematica non andiamo d'accordo!».

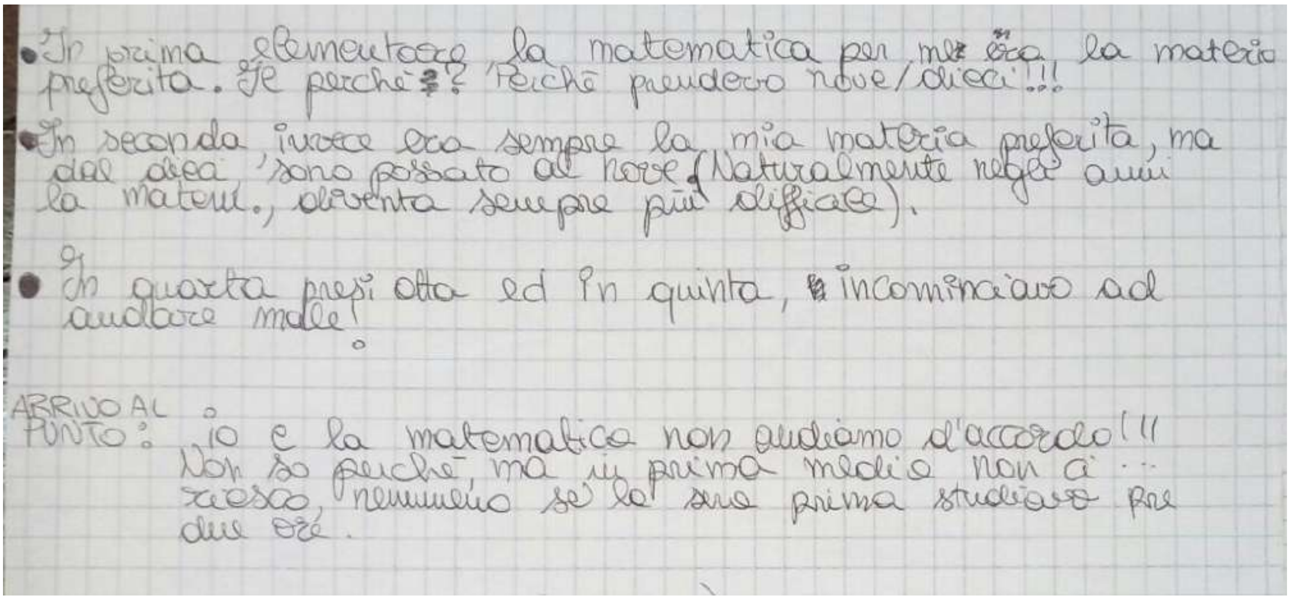

• In prima elementare la matematica per me era la materia preferita. E perché? Perché prendevo nove/dieci!!!
• In seconda invece era sempre la mia materia preferita, ma dal dieci sono passato al nove (Naturalmente negli anni la materia diventa sempre più difficile).
• In quarta presi otto ed in quinta, incominciavo ad andare male!
ARRIVO AL PUNTO: io e la matematica non andiamo d'accordo!!! Non so perché, ma in prima media non ci riesco, nemmeno se la sera prima studiavo per due ore.

Fig.2: "Il mio rapporto con la matematica"

E ancora: «… non so perché, ma … non ci riesco». Nemmeno, afferma scoraggiata, se studia a lungo.

Così vengono a mancare autostima e motivazione i due potenti motori della conoscenza e la scuola diventa sofferenza. La sofferenza e l'impegno non dovrebbero mai essere confusi: l'impegno si basa sulla curiosità, sul piacere, sul desiderio di migliorarsi costantemente, mentre la sofferenza, in generale, ci paralizza. Come la paura, emozione diffusa quando si menziona la matematica e, più in generale, la scuola.

Ce ne parla Roberto Imperiale nel suo bell'articolo: "Chi ha paura della matematica? Io… o forse no", una disamina delle diverse e possibili cause della paura della matematica. «La causa prima e più strutturata […] quasi sempre sta nella paura dell'insegnante di matematica, delle sue lontananze, della sua voce che non evoca e dell'assenza di sorriso, del suo sguardo "uniforme" e non comunicativo, del suo presunto possesso sacrale della verità definitiva». E' ormai noto a tutti che apprendimento ed emozione vanno di pari passo, che noi memorizziamo solo quelle cose che ci suscitano un'emozione piacevole e duratura; se la conoscenza fosse una semplice trasfusione di saperi potremmo eliminare la figura dell'insegnante sostituendola con dei sussidi digitali. Invece l'insegnante deve farsi mediatore, deve saper ascoltare per poter *parlare con* e non *parlare a*, essere disponibile, mantenendo l'autorità senza scadere nell'autoritarismo. L'insegnante non è il depositario di ogni conoscenza, ma colui che accompagna gli allievi nella scoperta aiutandoli a trovare gli strumenti per compiere il loro personale cammino.

Marta frequenta la prima media, ha diverse difficoltà in matematica, ma non si è data per vinta, non ha paura, anzi si sente sicura. In una riflessione sui problemi scrive:

«*La vita è piena di problemi, prima impariamo a risolverli e meglio è. Esiste una regola che mi aiuta a risolvere qualsiasi cosa? No. Allora quale tecnica uso per risolvere un problema? Per risolvere un problema prima devono darmelo se è di matematica, devo trovarlo o averlo se è della vita. Ora vi spiegherò sia quelli di matematica sia quelli della vita…*».

La fiducia e l'ottimismo di Marta la rendono sicuramente una buona solutrice di problemi (Fig.3). Seligman ci dimostra che gli ottimisti sono meno realisti, ma ottengono maggiori successi, perché osano di più, non si spaventano e non innalzano muri.

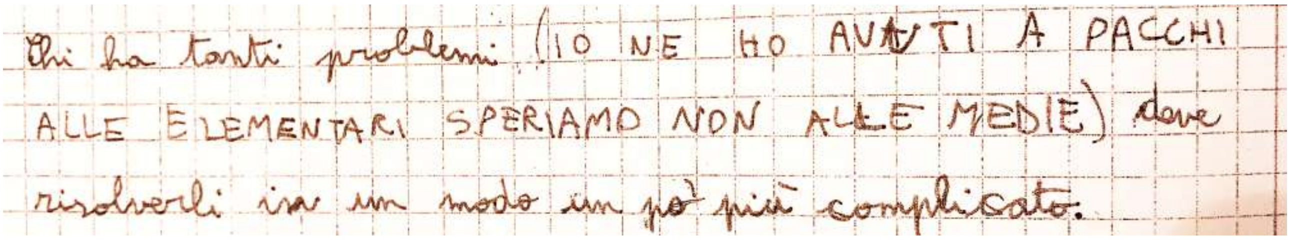


Fig.3: I problemi

Per Marta la matematica è divertente, lei stessa si diletta nell'inventare problemi da proporre agli altri, perché i problemi di matematica sono un po' più facili di quelli della vita. Ha delle difficoltà e delle attitudini e finché riuscirà a far leva su queste ultime sentendosi sempre appoggiata e sostenuta non avrà paura.

Anche gli insegnanti, a volte, hanno paura: paura di non essere all'altezza, paura di sbagliare e di non onorare le loro grandi responsabilità. Anche per questo Freire sosteneva l'importanza di una adeguata formazione degli insegnanti e del riconoscimento del loro ruolo sociale. Nei suoi libri parla a lungo del ruolo dell'insegnante, delle sue funzioni, dei suoi saperi e competenze, ma al contempo si sofferma sul riconoscimento del docente come persona, che attraverso la relazione, l'esempio e la coerenza diventa educatore. «Mi piace essere persona, perché incompiuto, mi riconosco come essere condizionato, ma so anche che, cosciente della mia incompiutezza, posso superarla». Ecco che, mentre insegno, imparo avvalendomi dei feedback che mi dispongo a cogliere dall'osservazione dei ragazzi. Tutti alla stessa tavola imbandita con l'unico scopo di godere dei piaceri dell'imparare.

Un'esperienza molto interessante in queste direzioni è quella delle scuole democratiche libertarie nate in Inghilterra nel 1921 che si basano sull'assunto che "se a un bambino diamo la piena responsabilità delle proprie attività quotidiane, maturerà fin da subito la capacità di ascoltare le proprie inclinazioni, di sperimentare i propri talenti, di scegliere la propria vita" (Nicholas Bawtree, sociologo). Anche in Italia si contano già alcune esperienze di scuole democratiche libertarie.

Definire l'educazione democratica non è facile proprio per la sua flessibilità e la sua capacità di adeguarsi alle esigenze dei ragazzi e del contesto in cui opera. Seguire le lezioni è una scelta, le regole della scuola sono condivise da tutti gli attori – studenti, insegnanti e genitori, l'accento è posto sul percorso di apprendimento scelto e non sul voto cosicché alle lezioni partecipano ragazzi in base al loro livello di preparazione e non alla loro età.

Bibliografia e sitografia

ABERKANE, I., (2017) *Liberate il cervello*, Ponte alle Grazie
CODELLO F., STELLA I., (2011) *Liberi di imparare*, Terra Nuova edizioni
FREIRE, P., (2014) *Pedagogia dell'autonomia*, Gruppo Abele
IMPERIALE, R., (2013) *Chi ha paura della matematica? Io… o forse no*, Erickson
LOCKART, P., (2010) *Contro l'ora di matematica*, Rizzoli
MILANI DON L., (1996) *Lettera a una professoressa*, Libreria Editrice Fiorentina
SELIGMAN, M., (2005) *Imparare l'ottimismo – Come cambiare la vita cambiando il pensiero*, Giunti
http://www.educazionelibertaria.org/scuole/in-italia/
https://www.youtube.com/watch?v=gFmFOmprTt0

“FARE SCUOLA” IN RELAZIONE ATTRAVERSO GLI “SPAZI COLORE” REALIZZATI AL CIVICO POLO SCOLASTICO “A. MANZONI” A MILANO: UN'ALTERNATIVA ALL'AULA SCOLASTICA PER PROPORRE NUOVE METODOLOGIE DIDATTICHE.

Mariagrazia MARCARINI
Università di Bergamo

Abstract

La scuola è un punto di riferimento importante per le famiglie e per gli studenti e dovrebbe essere pensata come una comunità e «in quanto comunità educante, genera una diffusa convivialità relazionale, intessuta di linguaggi affettivi ed emotivi ed è un punto di riferimento importante per famiglie e studenti e questo permette alla scuola di essere un ambiente di vita e luogo di preparazione alla vita.
“Fare scuola in relazione” significa rompere la rigidità del gruppo classe, che trova la sua espressione riduttiva nella linearità delle discipline che costringono a forme molto prescrittive di insegnamento e che limitano, ovviamente, la variabilità dei modelli didattici e non sempre permettono processi di sviluppo personali.
Pertanto, il compito della scuola, in senso generale, e dei docenti in particolare, è anche quello di allestire ambienti di apprendimento rispondenti alle esigenze didattiche ed educative in modo che ogni studente si senta riconosciuto, sostenuto, apprezzato e valorizzato tenendo conto dei suoi stili di apprendimento.
Per fare questo è necessario introdurre nella scuola progetti di innovazione didattica ed educativa che avrebbero bisogno di un riassetto complessivo degli spazi e delle attrezzature, alla luce della decisione di adottare uno specifico modello pedagogico, che però richiederebbero risorse economiche non sempre presenti.
Un esempio di come si possa intervenire con risorse economiche e spazi limitati, in edifici scolastici tradizionali, sono gli “Spazi Colore”, creati al Civico Polo Scolastico “A. Manzoni” di Via Grazia Deledda a Milano, che permettono di rompere l’unità del gruppo classe per sviluppare itinerari didattici innovativi non attuabili nelle classi per la rigidità degli arredi e le dimensioni ristrette.

Introduzione

L’evoluzione di modello pedagogico che attualmente sta attraversando la scuola, ha sugli studenti ricadute sia di tipo educativo e didattico, sia di tipo sociale e relazionale.
La scuola è un punto di riferimento importante per le famiglie e gli studenti e, affinché diventi anche un luogo affettivamente significativo e intenzionalmente abitato, è necessario che gli studenti siano consapevoli, propositivi e protagonisti non solo del loro percorso di studi

personale, ma anche di come utilizzare gli spazi della scuola per sentire gli ambienti di apprendimento come propri.
Il dibattito sugli spazi scolastici innovativi è attualmente al centro dell'attenzione e c'è un vasto movimento, nel mondo e ora anche in Italia, che dà impulso sia al rinnovamento delle metodologie didattiche, sia alla progettazione di nuove scuole innovative, ma ancora moltissime scuole in Italia sono costruite con una logica tradizionale cioè «a forma di scatola contenente al suo interno tante scatole più piccole, allineate fra loro su varie file, in una serie di piani sovrapposti» (Bruner, 1961, p. 157), che presentano aule non adeguate alle esigenze di nuove metodologie didattiche che permettano, appunto, di fare scuola in relazione e che vengano incontro ai diversi stili di apprendimento degli studenti.
Lo spazio educativo è sempre uno spazio progettato entro il quale si sviluppa una relazione educativa, una trasmissione culturale ed una «trasformazione esistenziale in ordine ad un progetto educativo» (Iori, 1996, p. XVII) ed è un elemento imprescindibile dell'accadere educativo.

Fare scuola in relazione

Una prima domanda è «Cosa si intende per "Fare scuola in relazione"»?
La scuola è pensata come una comunità e «in quanto comunità educante, la scuola genera una diffusa convivialità relazionale, intessuta di linguaggi affettivi ed emotivi, ed è anche in grado di promuovere la condivisione di quei valori che fanno sentire i membri della società come parte di una comunità vera e propria» (MIUR, 2007, p. 19, cfr. in Fiorin, 2012, p. 100).
Gli studenti sono messi al centro del processo di apprendimento solo se sono e si sentono parte di una comunità, infatti, «la considerazione del valore della persona, e quindi di tutte le persone – quali che siano le diverse storie individuali, le differenti condizioni di salute, sociali, economiche, i diversi riferimenti culturali o religiosi – porta al riconoscimento della diversità in tutte le sue svariate manifestazioni» (Fiorin, 2012, p. 98) e non solo questo permette alla scuola di essere un ambiente di vita e luogo di preparazione al futuro, ma ha il compito di fornire gli strumenti culturali necessari per «il passaggio dal mero apprendimento all'uso logico di ciò che si è appreso [che] rappresenta un passo essenziale verso la maturità intellettuale» (Bruner, 1961, p. 26).
Pertanto, il compito della scuola, in senso generale, e dei docenti in particolare, è anche quello di allestire ambienti di apprendimento rispondenti alle esigenze didattiche ed educative in modo che ogni studente si senta riconosciuto, sostenuto, apprezzato e valorizzato (MIUR, 2007), ciò significa che l'attenzione deve essere posta su ciascuno, in modo che venga assunta da parte del docente la prospettiva dell'apprendimento che consente, appunto, di prestare attenzione ad un aspetto fondamentale che caratterizza l'acquisizione delle conoscenze e delle abilità: quello dei diversi stili di apprendimento personali di ciascuno studente. La consapevolezza, da parte degli insegnanti, della diversità degli stili, dà loro l'opportunità di utilizzarli «valorizzando la diversità dei singoli approcci» (Fiorin, 2012, p. 103).
"Fare scuola in relazione", significa anche rompere la rigidità del gruppo classe che trova la sua espressione riduttiva nella linearità delle discipline che costringono a forme molto

prescrittive di insegnamento e che limitano, ovviamente, la variabilità dei modelli didattici e non sempre permettono processi di sviluppo personali. Si può pensare ad una «forma di deutero apprendimento o di apprendimento ad apprendere» (Batenson, 1990, p. 205), oppure anche all'esistenza di un apprendimento che organizza se stesso (Perticari, 2012, p. 346)

Per raggiungere questo obiettivo i modelli organizzativi della scuola, le metodologie e la didattica che nel passato hanno sicuramente garantito una certa sicurezza, ora non sono più sostenibili alla luce dei cambiamenti nelle modalità di apprendere degli studenti e in cui la scuola non è più l'unica agenzia educativa per l'apprendimento.

Ogni organizzazione collocata in un processo evolutivo è sempre provvisoria ed approssimativa, per questa ragione ha la tendenza ad «addomesticare il caos ambiente» (Calidoni, 1991, p. 93). Ma, proprio alla luce dei cambiamenti è necessario che la scuola si reinventi e segua il linguaggio dei ragazzi che hanno stili di apprendimento diversi, visivo spaziale, percettivo e cinestetico, che spesso si scontrano con quello unidirezionale (Bruner, 1961, p. 193) che viene utilizzato dall'insegnante, frequentemente di tipo simbolico ricostruttivo, che spesso frena la curiosità degli studenti (Perticari, 2012, p. 346).

L'apprendimento non è solo un atto cognitivo che si verifica in un soggetto, ma è un complesso processo socio-psicologico che dipende dal *background* culturale, dalla famiglia in cui sono cresciuti, dal numero di libri presenti in casa, quindi, dal livello culturale dei genitori e dalla motivazione personale allo studio. L'ambiente sociale gioca, quindi, un ruolo importante, in particolare la scuola frequentata, i compagni di classe, gli insegnanti che si incontrano, se sono motivati e in grado di infondere passione per la conoscenza e, non da ultimi, gli ambienti di apprendimento che hanno in sé una dimensione sociale visibile e una concreta influenza su chi li abita.

Aule e scuole rappresentano una comunità con una struttura definita, una micro-cultura, un clima sociale e relazionale e non hanno un significato neutrale dal punto di vista educativo perché possono ostacolare o favorire il processo di apprendimento. I risultati delle ricerche indicano che i giovani imparano rapidamente ed efficientemente quando possono lavorare in un gruppo di coetanei e quando possono partecipare alla decisione su quali obiettivi si vogliono raggiungere e come (Górkiewicz, 2016, pp. 7-9).

Per fare questo è però necessario, oltre alla volontà di innovare, anche un percorso condiviso tra docenti e studenti, in cui siano entrambi partecipi e protagonisti nelle azioni di progettazione e di miglioramento degli spazi e delle attività da svolgere. Soprattutto il coinvolgimento degli studenti è fondamentale perché, considerando la progettazione degli spazi scolastici come contesto decisionale dove l'ambiente esistente sarà usato dagli studenti e li influenzerà, è evidente che devono essere prese in considerazione anche le loro opinioni (Parnell, 2015, p. 123).

Una scuola della persona, una comunità educativa ha però bisogno di disporre di strumenti professionali che consentano di tradurre i valori affermati in pratiche didattiche che siano supportate da ambienti con un allestimento che abbia un'intenzionalità educativa volta a sviluppare l'aspetto relazionale e di condivisione dell'apprendimento, infatti, «si apprende insieme, non da soli» (Górkiewicz, 2016, p. 7).

Per fare questo è necessario introdurre nella scuola progetti di innovazione didattica ed educativa che però richiedono un riassetto complessivo degli spazi e delle attrezzature e, alla luce della decisione di adottare uno specifico modello pedagogico, ci sarebbe la necessità di disporre di risorse economiche non sempre presenti (Fianchini, 2017, p. 120).
Pertanto, si potrebbe intervenire con piccoli interventi per creare ambienti in cui sia possibile, attraverso alcune riconfigurazioni spaziali e apportando minimi adattamenti a situazioni consolidate rigidamente, dare una risposta a nuovi bisogni didattici e metodologici che si aprono alla riflessione dei docenti e che intravedono negli spazi comuni, negli atrii e nei corridoi, ambienti che potrebbero essere riadattati per attività collettive o anche per «modi alternativi di fare lezione» (Zuccoli, 2017, p. 73). Ma non solo, una seconda domanda sorge dall'analisi precedente: "È pensabile progettare un percorso didattico in cui ci possa essere un «forte potenziale aggregativo sia per lo studio, sia per la propria formazione in generale» (Zuccoli, 2017, p. 76) e in cui senza grandi finanziamenti, sia possibile strutturare alcuni spazi *ad hoc* per attività alternative"?
Queste riflessioni ci pongono di fronte ad una visione nuova di scuola in cui l'insegnamento e l'apprendimento sono sempre più collocati all'interno di una dimensione di «pratica collettiva che costruisce insieme significati sociali condivisi» (Zuccoli, 2017, p. 76) per rendere la scuola un reale terzo educatore.

Nuove idee per nuove pratiche educative

Una terza domanda che nasce dalle precedenti riflessioni, ci pone il problema di: "Come intervenire per proporre nuove pratiche educative per "fare scuola in relazione?".

Un esempio di come si possa intervenire con risorse economiche e spazi limitati, in edifici scolastici tradizionali sono gli "Spazi Colore" creati al Civico Polo Scolastico "A. Manzoni" del Comune di Milano. La complessità del Polo "Manzoni" presenta una situazione unica a livello nazionale: è un'istituzione pubblica che comprende scuole paritarie e corsi liberi, in fasce orarie uguali e differenziate e, come spesso succede, le differenze possono essere fonte di nuove opportunità per tutti gli studenti. All'interno dello stesso plesso in via Deledda ci sono importanti scuole paritarie gestite dal Comune di Milano: il Liceo Linguistico Manzoni, il PACLE/ITE Manzoni, il Liceo Linguistico della del Teatro alla Scala e il Civico Centro di Istruzione per l'Adulto e l'Adolescente che costituisce un'importante realtà, perché permette percorsi di studio abbreviato per giovani e adulti con il principale obiettivo di preparare gli studenti a superare le prove intermedie per il proseguimento degli studi (Esami di Idoneità/Certificazione delle competenze, prove da sostenersi presso Istituzioni Scolastiche esterne (Statali o Paritarie) a scelta dello studente, oltre ai Corsi di Lingue Serali.

In questo, seppur grande edificio gli spazi sono, comunque, limitati e soprattutto viene svolta una didattica molto tradizionale.

L'edificio è organizzato, a livello spaziale, per rispondere in modo abbastanza evidente a principi didattici molto tradizionali. La struttura, infatti, si articola in corridoi su cui si affacciano le aule, le cui dimensioni rispondono ai parametri della Legge sull'Edilizia Scolastica del 1975, in cui diventa difficile, proprio per le dimensioni non particolarmente ampie, proporre una didattica attiva e costruttivista, in cui lo studente è visto come costruttore che riesce a organizzare in modo autonomo e personale la struttura delle proprie conoscenze, in cui l'insegnante ha una funzione di guida e segue mediante un costante monitoraggio e tutoraggio (Santoianni, 2010, pp. 68-73), molto diversa dalla lezione frontale che ha caratteristiche di trasmissività del sapere.

In seguito all'emanazione delle Linee Guida sull'Edilizia Scolastica nel 2013, in cui si evidenzia come «per molto tempo l'aula è stata il luogo unico dell'istruzione scolastica. Tutti gli spazi della scuola erano subordinati alla centralità dell'aula, rispetto alla quale erano strumentali o accessori: i corridoi, luoghi utilizzati solo per il transito degli studenti, o il laboratorio per poter usufruire di attrezzature speciali», oggi emerge la necessità di avere ambienti o «microambienti finalizzati ad attività diversificate che hanno la stessa dignità e presentano caratteri di abitabilità e flessibilità in grado di accogliere in ogni momento persone e attività della scuola offrendo caratteristiche di funzionalità, confort e benessere» (MIUR, 2013, I, 1, p.1).

In questo modo la scuola si trasforma e può risultare come luogo in cui si possono sovrapporre «diversi tessuti ambientali: quello delle informazioni, delle relazioni, degli spazi e dei componenti architettonici, dei materiali, che a volte interagiscono generando stati emergenti significativi» (MIUR, 2013, I, 1, p.1).

Nel documento "La risposta delle Civiche Scuole Paritarie alle direttive europee" presentato in occasione del Convegno "Dire Fare Educare. Un percorso per Milano città educativa" promosso dall'Assessorato all'Educazione e all'Istruzione del Comune di Milano il 19 marzo 2016, i docenti del Polo Manzoni hanno espresso alcuni suggerimenti in merito ai cambiamenti da apportare all'edificio scolastico per attuare l'innovazione didattica anche in chiave digitale. Le proposte, oltre a riguardare la modificazione dei programmi, dei tempi delle lezioni, proponevano di creare degli spazi adatti al lavoro di gruppo o all'utilizzo di nuove metodologie didattiche, proprio perché le aule presentano rigidità e dimensioni che mal si adattano a proporre percorsi didattici e metodologici alternativi. A tal fine, poiché non si possono abbattere tutti i muri, veniva proposto di sfruttare angoli inutilizzati, spazi antistanti la palestra, attrezzare alcuni spazi più larghi nei corridoi con tavoli, sedie o altre strutture utili per lo studio individuale o di gruppo «introducendo o una nuova riorganizzazione degli spazi con "aule di materia" (AA.VV., 2016, p. 9).

È evidente la richiesta urgente dei docenti di una trasformazione degli spazi della scuola, in modo da poter proporre pratiche didattiche innovative per sviluppare le competenze degli studenti in una situazione collaborativa, utilizzando le risorse digitali all'interno di ambienti scolastici rispondenti a relazioni condivise.

Figura 1 Planimetrie Civico Polo Scolastico "A. Manzoni", Via Grazia Deledda, Milano.

I nuovi "Spazi Colore": genesi e realizzazione di un'idea

La sollecitazione proveniente dai docenti e la visita effettuata all'Ørestad Gymnasium di Copenhagen da parte di gruppo di persone composto da docenti e funzionari, guidato dal Direttore dell'Area Servizi Scolastici ed Educativi dell'Assessorato all'Educazione, Dott.ssa Sabina Banfi, hanno fatto maturare l'esigenza di ripensare all'utilizzo innovativo di alcuni spazi inutilizzati nell'atrio della scuola.

L'Ørestad Gymnasium è una scuola assolutamente innovativa, costruita sulla scia della nuova visione degli spazi negli edifici scolastici che si sta consolidando sia in Danimarca, sia in Europa e ultimamente anche in Italia, con pochissime aule e spazi ampi per una didattica innovativa e dove viene data molta importanza alla relazione tra studente e docente e tra studente e studente e che permette l'integrazione e lo scambio relazionale, inoltre, la flessibilità degli spazi consente la personalizzazione, il *Cooperative Learning* e la *Peer-to-Peer Education*, l'utilizzo di nuove tecnologie informatiche ed il superamento dell'uso del cartaceo (Marcarini, 2016, pp. 187-190).

In particolare, il progetto pedagogico prevede la collaborazione tra tutti i docenti, non più chiusi rigidamente nelle loro discipline e viene, quindi, espressa quella che può essere definita come "Cultura Ponte" (Sandrone, 2007, p. 49) che toglie dall'isolamento i docenti realizzando quella mediazione necessaria tra persona e cultura.

La "Cultura Ponte" si avvicina molto al *Team-Teaching*, ma quest'ultima accezione è meno ampia perché esclude i dettagli strutturali ed organizzativi (Sandrone, 2007, pp. 48-50),

Non si può non rimanere colpiti dalla bellezza, dall'innovazione metodologica e tecnologica e soprattutto dalla qualità delle relazioni umane che si instaurano all'Ørestad Gymnasium.

Da qui la progettazione degli "Spazi Colore" da parte della dott.ssa Sassone, Responsabile dell'Ufficio Funzioni Trasversali e Progetti Speciali, e dell'arch. Scevola, Responsabile dell'Unità Rete Scolastica e Logistica, inaugurati il 24 di novembre 2017.

Gli "Spazi Colore" sono tre nuovi ambienti ricavati dallo spazio occupato da alcuni uffici, denominato "margherita", nell'atrio della scuola mediante un progetto di riconfigurazione; ciascuno può accogliere al massimo circa 16 studenti; sono arredati con tavoli di varie forme, scaffali e cuscinoni per "l'angolo morbido" e sono forniti di wifi, c'è pertanto la possibilità di

Figura 2 Gli ambienti dello spazio denominato "margherita" del Polo Scolastico "A. Manzoni" a Milano, prima dell'intervento di riconfigurazione.

strutturare diversi *setting* didattici.

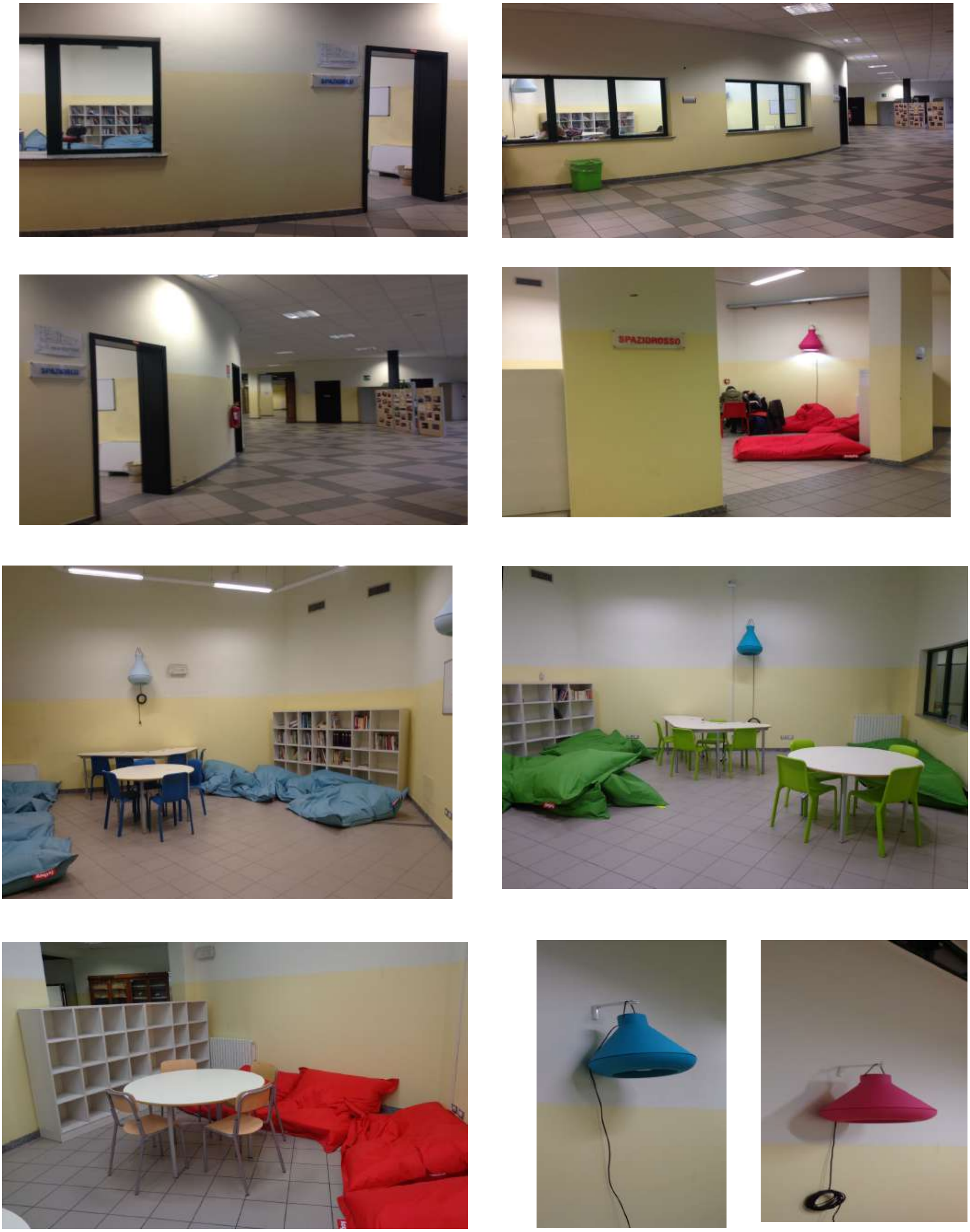


Figura 3 I tre "Spazi colore" realizzati nell'atrio del Polo Manzoni del Comune di Milano in Via Grazia Deledda

Come utilizzare gli spazi: varie proposte per “fare scuola in relazione”

Un’ulteriore domanda è: “Cosa fare in questi spazi dedicati agli studenti per poter proporre una didattica innovativa, ma non solo?”

Dai docenti sono arrivati alcuni suggerimenti sull’utilizzo di questi spazi per *nuove modalità didattiche.* In particolare, come già ricordato, c’è l’opportunità di rompere l’unità del gruppo classe per sviluppare itinerari didattici innovativi non attuabili nelle classi per la rigidità degli arredi e le dimensioni ristrette; quindi, *Cooperative Learning* tra i componenti dello stesso gruppo classe, oppure mediante la collaborazione tra più docenti per lavori interclasse o interdisciplinari o anche per momenti di studio individuale, di ricerche o progetti tra un gruppo di studenti, mentre altri componenti del gruppo classe proseguono il lavoro in aula.

Possono essere utilizzati come *spazio informale e relax*, anche solo per un momento di decompressione e di riposo o una pausa personale, prima o dopo le lezioni o durante gli intervalli, non necessariamente si devono fare delle attività particolari, proprio per la presenza di un arredo “soffice” con sedute comode e confortevoli (Miur, 2013, I,1.5, p. 3).

Altri utilizzi riguardano la loro possibile fruizione come *spazio studio*, sia durante, sia al di fuori dell’orario scolastico; la scuola, proprio per la sua caratteristica di avere molti tipi di corsi, è aperta dal mattino alle 7.45 fino alle 22.30, per tale ragione questi ambienti possono essere frequentati da diverse tipologie di studenti e potrebbero essere utilizzati anche nei mesi di giugno e luglio, fino al termine degli esami di stato.

Per la presenza di scaffalature è possibile prevedere uno spazio *biblioteca diffusa***,** sui ripiani si potrebbero depositare libri di vario genere, non solo scolastici, ma anche romanzi, saggi o anche dispense, dando vita ad un *Book Crossing* interno. Questa piccola biblioteca non sostituisce la biblioteca d’istituto, ma si aggiunge per creare ulteriori possibilità di lettura, secondo gli itinerari culturali e personali di ogni studente.

Proposta di sviluppo di un percorso di “Progettazione partecipata”

Le possibilità di utilizzo di questi spazi sono molteplici e poiché gli spazi sono dedicati agli studenti, è necessario renderli partecipi su come utilizzarli, in modo che se ne approprino e si sentano davvero a proprio agio come a casa loro (Volpicelli, 1964, p. 214) o comunque come un luogo in cui stare bene.

La partecipazione alla progettazione degli spazi informali porta gli studenti a una condivisione del significato degli spazi e a una “consapevolezza ambientale” (Horne-Martin, 2002, pp. 139-156) che è la chiave di volta per comprendere l’importanza che hanno gli spazi fisici in relazione al benessere ambientale (Iavarone, 2008) e, ovviamente, all’apprendimento (Woolner, 2010, p. 45), oltre che per stimolarli a mantenerli belli, puliti e in buono stato di conservazione.

Per tale ragione, potrebbe essere utile sottoporre l’idea di un percorso di “Progettazione partecipata” sull’utilizzo di tali spazi.

Tale percorso deve essere sviluppato proprio dagli studenti visto che sono spazi a loro dedicati, però supportati dagli educatori e dai docenti interessati.

L’obiettivo della progettazione partecipata è di incrementare lo sviluppo delle competenze trasversali, in particolare è possibile sviluppare in particolare le seguenti competenze chiave per la cittadinanza (Parlamento Europeo, 2006):

- imparare a imparare
- progettare

- comunicare
- collaborare e partecipare
- agire in modo autonomo e responsabile
- risolvere problemi
- individuare collegamenti e relazioni
- acquisire ed interpretare l'informazione.

Il riferimento è anche alle più generali competenze di base come comunicare nella madrelingua, spirito di iniziativa e imprenditorialità e utilizzo delle TIC.

Sfruttare l'opportunità degli "Spazi Colore", permette agli insegnanti di sviluppare negli studenti competenze in un contesto in cui sono coinvolti nell'affrontare scelte, situazioni di *problem solving*, collaborazione e per portare a termine compiti in modo autonomo e responsabile. Di fondamentale importanza l'elaborazione del progetto formativo attraverso un'attività che abbia le caratteristiche di un laboratorio mediante la strategia del *Cooperative Learning*, individuando le conoscenze e le abilità fondamentali già acquisite dallo studente per sviluppare ulteriori competenze.

Conclusioni

Questi nuovi ambienti possono essere mediatori di apprendimento perché gli esseri umani sviluppano e acquisiscono conoscenze dalle loro interazioni con l'ambiente, naturale o artificiale e con altre persone; l'ambiente fisico influenza gli studenti, il loro apprendimento e i contenuti che devono essere appresi. Gli "Spazi Colore" possono essere considerati luoghi attivi per l'apprendimento e intesi come sistemi permanenti di attività collettiva con le proprie regole condivise ed elaborate.

È necessario considerare come l'allievo influenza l'ambiente sociale e come l'ambiente sociale lo stimola o lo forma e come agiscono sugli studenti le influenze degli ambienti fisici (Lippman, 2010, pp. 134-140).

Questi nuovi spazi di apprendimento offrono l'opportunità di sviluppare gli aspetti cognitivi specifici, attraverso la promozione di attività peculiari ed essere descritti come centri di attività che devono poter essere progettati e organizzati per supportare: attività individuali, attività uno-a-uno, in piccolo e grande gruppo con percorsi di apprendimento che incoraggino il *Cooperative Learning* e altre modalità di apprendimento (Lippman, 2010, p. 137).

I diversi *setting* presenti negli "Spazi Colore", sono necessari per promuovere diverse strategie di apprendimento, nelle quali gli studenti acquisiscono conoscenze e competenze.

Attraverso questi ambienti diventa anche possibile ricomporre la frattura tra il fare e il sapere, tra la prassi e la teoria, tra il sapere pratico e sapere teorico che ha portato alla gerarchizzazione delle scuole e dei saperi (Bertagna, 2012, p. 43).

Bibliografia

AA.VV. (2016), *La risposta delle Civiche Scuole Paritarie alle direttive europee*, Comune di Milano, Milano.

BARRET P., ZHANG Y. (2009), *Optimal Learning Spaces*, University of Salford, Salford.

BARRETT P., ZHANG Y., DAVIES F., BARRETT L. (2015), *Clever Classrooms*, University of Salford, Manchester.

BATENSON G. (1990)[10], *Verso un'ecologia della mente*, Adelphi, Milano

BATENSON G. (2011)[15], *Mente e natura*, Adelphi, Milano.

BERTAGNA G. (2011), *Lavoro e formazione dei giovani*, Editrice La Scuola, Brescia.

BRUNER J. (1961), *Dopo Dewey. Il processo di apprendimento nelle due culture*, Armando Armando Editore, Roma.

CALIDONI P. (1991), *Organizzazione e programmazione nella scuola elementare*, Editrice La Scuola, Brescia.

COLLINS A. (1993), *Cognitive Apprenticeship and Instructional Technology*, Cambridge, MA.BBN, (Eric Document Reproduction Service N. 331465.

DENT-READ C. and ZUKOW-GOLDRING P. (1997), *Introduction: Ecological Realism, Dynamic Systems Approaches to Development*, in C. DENT-READ, P. ZUKOW-GOLDRING (Eds.), *Evolving Explanation of Development: Ecological Approaches to Organism-Environments Systems*, American Psycological Association, Washington DC.

FIANCHINI M., (2017), *Modelli autorganizzati di miglioramento nell'uso degli ambienti scolastici*, in M. FIANCHINI (Ed.), *Rinnovare le scuole dall'interno. Scenari e strategie di miglioramento delle infrastrutture scolastiche*, Maggioli Editore, Sant'Arcangelo di Romagna (RN).

FIORIN I. (2012), *Scuola accogliente, scuola competente*, Editrice La Scuola, Brescia.

GÓRKIEWICZ K. (2016), *Social and Cultural Learning Environments*, Educational Spaces 21, Open up! Vol. 3, Warsaw.

GUASTI L. (2002), *Didattica e significato del metodo*, in L. GUASTI (Ed.), *Saggi sul metodo*, Vita e Pensiero, Milano.

HONE-MARTIN S. (2006), *The Classroom environment and children's performance-is there a relationship*?, in C. Spencer, M. Blades (Eds.), *Children and their Environments*, Cambridge University Press, Cambridge.

HORNE-MARTIN S. (2002), *The classroom environments and its effect on the practice of teacher*, «Journal of Environmental Psychology», n. 221-2, 2002, pp. 139-156.

IAVARONE M.L. (2008), *Educare al benessere*, Bruno Mondadori, Milano.

LIPPMAN P.C. (2010), *Evidence–Based Design of Elementary and Secondary schools. A Responsive Approach to creating Learning Environments*, John Wilwy & Sons, Inc., Hoboken New Jersey.

MALLGRAVE H.F. (2015), *L'empatia degli spazi. Architettura e neuroscienze*, Raffaello Cortina Editore, Milano.

MARCARINI M. (2016), *Pedarchitettura. Linee storiche ed esempi attuali in Italia e in Europa*, Studium, Roma

MARTINELLI M. (2004), *In gruppo si impara. Apprendimento cooperativo e personalizzazione dei processi didattici*, SEI, Torino.

MINCU M.E. (Ed.) (2011), *A ciascuno la sua scuola. Teorie, politiche, contesti della personalizzazione*, Sei Torino.

MIUR (2007), *Indicazioni per il curricolo della scuola dell'infanzia*, Roma.

MIUR (2013), *Linee Guida di Edilizia Scolastica*, Roma.

MIUR (2015), *Legge 13 luglio 2015, n. 107, "La Buona scuola", Riforma del sistema nazionale di istruzione e formazione e delega per il riordino delle disposizioni legislative vigenti*, Roma.

PARLAMENTO EUROPEO (2006), *Competenze chiave per l'apprendimento permanente — un quadro di riferimento europeo*, Bruxelles.

PARNELL R. (2015), *Co-creative adventures in school design*, in P. Woolner (Ed.), *School design together*, Routledge, London and New York.

PERTICARI P. (2012), *Alla prova dell'inatteso. Scuola e crisi educativa. Dalla malaripetizione agli insegnamenti profondi,* Armando Editore, Roma.

SANDRONE G. (2007), *La cultura assente. Un'indagine sul tema «Professione docente e "cultura ponte"*», Rubettino, Soveria Mannelli.

SANTOIANNI F. (2010), *Modelli e strumenti di insegnamento*, Carocci, Roma.

SASSONE A., SCEVOLA C. (2017), "*Spazi Colore": un esempio di trasformazione di ambienti scolastici per la sperimentazione didattica*, Poster presentato al Convegno e mostra laboratorio «Progettare scuole insieme fra pedagogia, architettura e design», 27-28 Ottobre 2017, Facoltà di Scienze della Formazione, Bressanone.

VOLPICELLI L. (1964), *La scuola come casa*, in Id, *L'educazione contemporanea*, vol. II, Armando Armando, Roma.

VOLPICELLI L. (1966), *Architettura scolastica*, in Id., *L'educazione contemporanea*, Armando Armando, Roma, Vol. III.

VYGOTSKY L. S. (1980), *Pensiero e linguaggio*, Giunti Barbera, Firenze.

WOOLNER P. (2010), *The Design of Learning Spaces*, Continuum International Publishing Group, London.

WOOLNER P. (2015) (Ed.), *School Design Together*, Routledge, Abingdon and New York.

ZUCCOLI F. (2017), *Un ambiente che può essere gabbia o stimolo. Le voci e le riflessioni dei docenti*, in M. FIANCHINI (Ed.), *Rinnovare le scuole dall'interno. Scenari e strategie di miglioramento delle infrastrutture scolastiche*, Maggioli Editore, Sant'Arcangelo di Romagna (RN).

ESPERIENZE DI COMUNITÀ DI APPRENDIMENTO VIRTUALI

Chiara MARTINENGO[1], Francesco CURATELLI[2]
[1] *DIMA - Università di Genova , Genova (GE)*
[2] *DITEN - Università di Genova, Genova (GE)*

Riassunto

In questo lavoro presentiamo un'esperienza di formazione di comunità di apprendimento virtuale nell'insegnamento della Matematica in Corsi di Studio dell' Università di Genova. In particolare presentiamo un laboratoriale virtuale in cui gli studenti hanno potuto sperimentare una didattica cooperativa basata su specifiche metodologie didattiche e sullo sviluppo di nuove forme di relazioni che hanno portato a migliorare sia le loro conoscenze specifiche sia le loro capacità cognitive e meta-cognitive. Il laboratorio virtuale si avvale di AulaWeb, un servizio di supporto on-line alla didattica dell'Università di Genova, sviluppato su piattaforma Moodle ed accessibile tramite browser. Descriviamo nel lavoro le linee metodologiche, i risultati e diversi esempi di attività, anche interdisciplinari con materie di carattere fisico e chimico, svolte nelle comunità virtuali. Descriviamo infine come il lavoro nelle comunità virtuali permette di migliorare le modalità di valutazione degli apprendimenti degli studenti.

Introduzione

In questo lavoro vogliamo portare un contributo sull'importanza delle relazioni e interazioni docenti/studenti/tutor nell'insegnamento e nell' apprendimento della Matematica, e sull'uso delle nuove metodologie per usufruire di tali interazioni al fine di ottenere apprendimenti sempre più sicuri e duraturi (Albano, Ferrari, 2007; Ferrari 2011). Il nostro contributo è frutto di una ricerca compiuta con studenti dei CdS di Chimica e Tecnologie Chimiche (CTC) e di Scienza dei Materiali (SdM), dell'Università di Genova, sia nell'ambito dell' insegnamento curriculare di Istituzioni di Matematiche del I anno, sia in una iniziativa volta a consolidare i prerequisiti matematici richiesti nei corsi dei due CdS, soprattutto nei confronti degli studenti che non hanno superato il test delle conoscenze iniziali e ai quali pertanto sono stati assegnati gli OFA (Obblighi Formativi Aggiuntivi).

L'obiettivo della ricerca è stato quello di accompagnare e completare l'insegnamento tradizionale, di tipo frontale, con la creazione di piccole comunità di apprendimento, in cui possano avere un particolare risalto le interazioni docenti/studenti, tutor/studenti, docenti/tutor, studenti/studenti. In particolare forniremo alcune esperienze di come si possano usare le nuove tecnologie per creare comunità di apprendimento virtuali. Inoltre, attraverso alcuni esempi, sottolineeremo la possibilità di creare attività interdisciplinari, in cui poter applicare i contenuti matematici considerati prerequisiti e quindi oggetto dell'insegnamento nelle scuole superiori (sui quali tanti studenti hanno difficoltà, in particolare quelli che hanno gli OFA, ma non solo).

Le comunità di apprendimento da noi usate sono ambienti, fisici o virtuali, in cui sperimentare un approccio laboratoriale e collaborativo all'apprendimento della matematica (Pesci, 2011[a,b], 2016). Esse consistono in gruppi di lavoro che operano, in aula o in rete, secondo delle precise linee metodologiche tese a cercare di capire dove e per quale motivo il ragionamento dello specifico studente si inceppa, e andare alla radice del suo problema. I gruppi in aula sono costituiti da un numero limitato di studenti (5-6) mentre i gruppi in rete possono avere un maggior numero di studenti (fino a 20-25). I laboratori online sono stati realizzati mediante l'uso di Aulaweb, un servizio di supporto on-line alla didattica dell'Università di Genova, sviluppato su piattaforma Moodle (Ferrari, 2006) ed accessibile tramite browser. In particolare è stato usato un Forum del tipo Domande-Risposte (Martinengo, Curatelli, 2017). Nel primo paragrafo descriviamo le linee metodologiche e i risultati ottenuti attraverso il laboratorio online; in particolare analizziamo una nuova proposta realizzata all'interno del laboratorio online in merito alle relazioni studenti/tutor/docenti e il modo con cui questo tipo di proposta porta a modificare le modalità di valutazione. Nel secondo paragrafo analizziamo le attività svolte in uno dei laboratori online e le relative valutazioni. Nel terzo paragrafo riportiamo alcuni esempi di attività interdisciplinari che mettono in evidenza le difficoltà degli studenti nelle applicazioni della matematica di base a discipline sperimentali e nel quarto paragrafo, insieme alle conclusioni di questa sperimentazione, definiamo una proposta operativa di formazione di comunità di apprendimento nelle Scuole Secondarie Superiori.

Laboratori online di Matematica: linee metodologiche e risultati

Come detto nell'introduzione, i laboratori online sono supportati da precise linee metodologiche, definite attraverso anni di sperimentazione di laboratori in aula (Martinengo, Curatelli, 2015), che possiamo sintetizzare nei seguenti punti:

Proposta di attività studiate appositamente per il passaggio da apprendimenti di tipo meccanico ad una più piena comprensione semantica dei concetti. Queste attività sono state concentrate nel laboratorio online e si affiancano ad esercizi di una tipologia più standard, utili per verificare l'acquisizione delle competenze tecniche, che vengono svolti nei laboratori in aula.

Adozione di un metodo collaborativo, sperimentato nel lavoro di gruppo, attraverso l'azione sinergica di docente, tutor e studenti. In ogni gruppo gli studenti sono invitati a: a) motivare sempre le loro risposte; b) confrontare le proprie strategie con quelle degli altri compagni scoprendo se sono sbagliate e perché oppure se si può rispondere in più modi corretti; c) a trascrivere le idee che vengono fuori nel gruppo, i ragionamenti corretti e i motivi per cui non funzionano i ragionamenti sbagliati.

Sviluppo di nuove relazioni/interazioni finalizzate all'apprendimento, attraverso la collaborazione di vice-tutor, cioè studenti del corso che sostituiscono il docente o il tutor nei commenti alle risposte dei compagni; questo sempre sotto la supervisione del docente o del tutor, che monitorano i commenti e intervengono solo se necessario.

	Iscritti CTC	**Frequentanti corso Matematica**	**Partecipanti lavoro lab online (media)**	**Vice-tutor**
a.a. 16-17	135	92 (media)	36 (min 27- max 45)	12
a.a. 17-18	122	80 (media)	55 (min 41- max 79)	49

Tabella 1 – confronto lab online a.a. 16-17 e 17-18

Nell'esperienza portata avanti nel primo semestre dell'a.a. 2017-18 il laboratorio online è stato diviso in gruppi, che hanno lavorato indipendentemente gli uni dagli altri sulle stesse attività. In ogni gruppo (di 24-25 studenti) tutti gli studenti sono stati invitati ad assumere il ruolo di vice-tutor a turno; in alcuni gruppi gli studenti si sono offerti spontaneamente, sulla base di una scaletta concordata tra loro, mentre in altri gruppi, soprattutto nei primi laboratori, il ruolo è stato proposto dal docente o dal tutor. Nella tabella (Tab. 1) mettiamo a confronto alcuni dati relativi all' esperienza portata avanti nel I semestre degli a.a. 2016-17 e 2017-18. Nell'a.a. 16-17 il laboratorio virtuale è stato unico per tutti gli studenti; nel secondo semestre diversi altri studenti hanno lavorato come vice-tutor, per un totale di 29 studenti.

Attraverso il laboratorio online, abbiamo potuto sperimentare la formazione di comunità di apprendimento (Midoro, 2002) che hanno permesso di ottenere i seguenti importanti risultati, comprovati dai risultati finali dell'insegnamento.

In primo luogo, si favoriscono gli apprendimenti, perché si ottiene una più profonda consapevolezza dei contenuti, una più piena padronanza linguistica, e si impara ad esprimersi in modo corretto attraverso il linguaggio matematico. Un contributo fondamentale in questo senso viene fornito dalla riflessione sulle strategie e sugli errori propri e degli altri compagni.

E' molto importante a questo riguardo curare il modo di commentare le risposte, sia da parte del docente che dei tutor che degli studenti vice-tutor. Infatti, nei commenti si rilevano eventuali errori nelle risposte, si effettua la diagnosi e la spiegazione dell'errore, e si forniscono spunti per la riflessione incoraggiando il confronto con le soluzioni e i relativi commenti precedentemente postati. Di fatto, promuovere il confronto tra possibili strategie risolutive incentiva in modo concreto l'attivazione dei processi cognitivi e meta-cognitivi, portando ad una più piena consapevolezza dei propri apprendimenti. Di questo si ha la conferma quando lo studente, spesso spontaneamente, segnala di aver capito l'errore commesso attraverso il confronto con le altre risposte, e poi posta la versione corretta.

In secondo luogo, si facilitano le interazioni interpersonali tra studenti: l'abitudine all'ascolto (inteso anche come lettura e analisi del lavoro altrui), la capacità di intervenire in modo opportuno, e la capacità di condividere risorse, difficoltà e successi. Questo aspetto è fondamentale da due punti di vista. Per prima cosa c'è spesso (soprattutto per gli studenti più bravi) il pericolo di considerare il sapere come una risorsa propria e di non essere disposti a condividerlo con gli altri. Abbiamo invece visto che lavorando nel laboratorio online tutti i partecipanti hanno accettato di condividere il proprio sapere e hanno cercato i mezzi più efficaci per renderlo disponibile ai compagni, cercando la strategia più opportuna per spiegare i passaggi difficili o per dare input utili per il ragionamento. D'altra parte c'è il pericolo (soprattutto per gli studenti con difficoltà) di non essere disposti a mettersi in gioco pubblicamente, per non denunciare apertamente le proprie carenze. Anche in questo caso, abbiamo constatato come operando nel laboratorio online gli studenti più deboli hanno preso sempre più coraggio e hanno accettato di postare soluzioni non corrette. Questo perché hanno pienamente compreso che l'obiettivo del lavoro sul laboratorio online non è di dimostrare di aver già capito tutto e produrre subito un elaborato corretto, ma piuttosto quello di aiutare ad imparare, ragionare, capire, e correggere gli errori.

In terzo luogo, si facilitano le interazioni interpersonali studenti/docenti, studenti/tutor, docenti/tutor. In questo modo l'approccio con il docente perde la connotazione di una relazione di tipo verticale, e il docente non è più visto come un attore che si limita a calare dall'alto il suo sapere. Inoltre la relazione docente/studente viene intermediata dalla figura di tutor, ruolo ricoperto da studenti della laurea magistrale o da dottorandi, cioè da ragazzi poco più grandi di quelli a cui è rivolto il tutorato, che, con la loro recente esperienza di studenti, mettono maggiormente a loro agio le matricole. Il vedere realizzate delle relazioni tra docenti e tutor fa sperimentare un lavoro di equipe, corale e sinergico, di cui gli studenti si sentono parte attiva e ne ricavano una motivazione fortissima, un incoraggiamento a non deprimersi davanti ad eventuali insuccessi e a provare "gusto" nel fare matematica.

In quarto luogo, si favorisce la cooperazione tra studenti. Nell'a.a. 2016-17 abbiamo avuto tantissime testimonianze che il lavoro sinergico degli studenti nel laboratorio online è continuato anche in gruppi di studio in presenza, e anche al di fuori dell'ambito della Matematica, estendendosi anche agli altri insegnamenti. Si sono quindi create interazioni durature e proficue, che sono continuate anche nell' a.a. successivo. Riteniamo che questo aspetto sia importantissimo, soprattutto per studenti che si preparano a professioni che sempre più spesso richiedono un lavoro di equipe.

Come ultimo risultato, ma di rilevanza fondamentale, si crea una nuova concezione della valutazione nell'insegnamento. Infatti, per tutti coloro che lavorano nel laboratorio online non viene valutato più soltanto il risultato finale dell'apprendimento, ma anche i processi di apprendimento seguiti dallo studente, cioè il suo percorso a partire dalla una situazione iniziale che per ciascuno assume connotazioni differenti. Inoltre, e questo soprattutto per gli studenti vice-tutor, non si valuta più soltanto il sapere della singola persona, l'acquisizione dei contenuti tecnici, la chiarezza di idee nei vari concetti e la capacità di applicarli in modo opportuno in situazioni o di tipo matematico o derivanti da situazioni sperimentali. Viene valutata anche la capacità di lavorare nel gruppo, di individuare se il lavoro di altri è corretto o contiene errori e imprecisioni, di fornire input per la riflessione che portino a capire gli errori e a non ripeterli, di spiegare in modo efficace i vari concetti.

Tutti gli studenti che nell'a.a. 16-17 hanno lavorato nel laboratorio online, e in particolare quelli che hanno ricoperto il ruolo di vice-tutor, hanno fornito un feedback estremamente positivo del loro lavoro. A titolo di esempio, riportiamo due testimonianze:

"Avrei voluto dirglielo a voce ma a questo punto ne approfitto via e-mail, volevo ringraziarla ulteriormente perché con la sua passione nell' insegnare e i suoi metodi innovativi mi ha fatto risvegliare l' interesse per la matematica e per lo studio in generale, che avevo perso ormai dalla prima media (speriamo che duri)" (studente SdM-coorte 16-17).

"*Davvero grazie per tutto il lavoro fatto e la disponibilità. Ha messo a disposizione degli studenti uno strumento davvero efficace e stimolante"* (studentessa CTC-coorte 16-17).

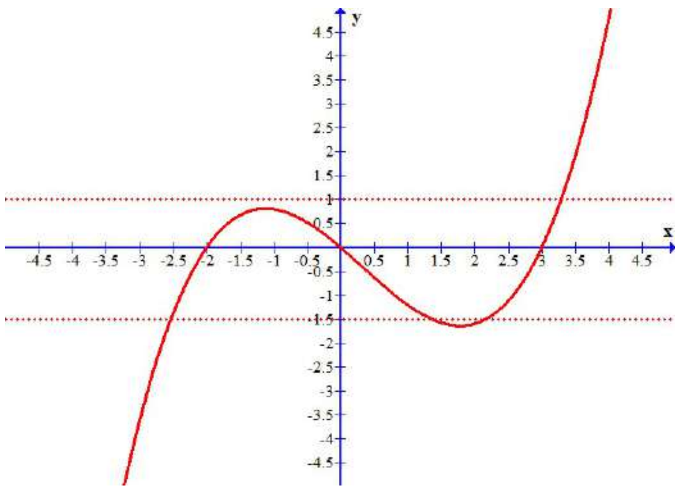


Figura 1 – Grafico LabMat online n. 8

Un esempio di Laboratorio online di Matematica e di valutazione dei vice-tutor.

In questo paragrafo analizziamo il lavoro nel laboratorio online, attraverso una delle attività proposte. Più precisamente, dopo il testo di uno degli esercizi proposti nel laboratorio (contenente anche un esercizio sui prerequisiti matematici applicati alla fisica), forniamo alcuni esempi di risposte e di commenti. Inoltre la tabella 2 (Tab. 2) contiene lo schema delle valutazioni dei vice-tutor che hanno operato in questo laboratorio sui vari gruppi.

LabMat online n. 8

Data la funzione f(x) il cui grafico è rappresentato in Fig. 1:

a) determinare gli zeri e il segno di f(x)

b) determinare gli intervalli in cui f(x) è crescente

c) dire se nell'intervallo [-2,0] la funzione f(x) ammette massimo e minimo e in tal caso determinarli (in modo approssimato) *d) dire se nell'intervallo [1, 3.5] la funzione f(x) ammette massimo e minimo e in tal caso determinarli (in modo approssimato).*

Osserviamo che, nel rispetto delle linee metodologiche indicate nel paragrafo precedente, l'esercizio proposto è mirato alla lettura di un grafico e in particolare a rilevare **dal grafico,** in modo corretto, alcuni elementi (come gli zeri, il segno, la crescenza) che spesso vengono studiati meccanicamente. Infatti quando una funzione viene assegnata attraverso la sua espressione analitica, gli studenti si dedicano allo studio algebrico degli elementi suddetti, ma senza avere una chiara consapevolezza dei contenuti, e quindi spesso non sono in grado di gestire il grafico e di adoperare lo stesso grafico per un controllo sulla coerenza dei risultati ottenuti per via algebrica.

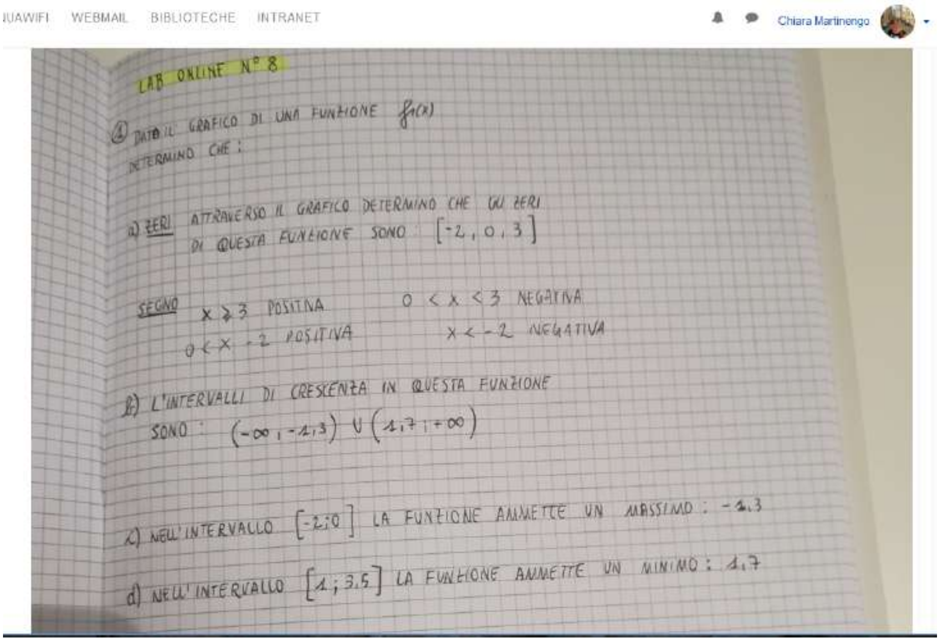


Figura 2 – Esempio di risposta con errori al LabMat online n. 8.

In Fig. 2, vediamo un errore ricorrente nelle risposte ai punti c) e d), errore che deriva dalla confusione tra il concetto di massimi e i minimi relativi per la funzione, e il concetto di massimo e minimo assunti da una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso. Infatti, ad esempio sull'intervallo [-2, 0], viene riconosciuto il massimo, che è anche un massimo relativo della funzione, ma non viene riconosciuto il minimo, che non è un minimo relativo della funzione e che viene assunto negli estremi dell'intervallo. In Fig. 3 vediamo il commento del vice-tutor, che segnala l'errore ma non fornisce direttamente la risposta, dando piuttosto un input di riflessione mettendo in evidenza che si sta lavorando su un intervallo limitato e chiuso e invitando a ragionare sulla definizione di massimo e di minimo.

In Fig. 4 vediamo un'altra risposta al LabMat online n. 8, e contenente errori. Infatti, lo studente confonde il concetto di flesso con quello di minimo/massimo relativo; inoltre non dice esplicitamente quali sono i valori massimi e minimi sugli intervalli dati, ma dà solo informazioni sui punti di minimo e di massimo. Poiché la vice-tutor questa volta non aveva segnalato gli errori dando per buona la risposta, interviene la docente (Fig. 5)

Re: LabMat online n. 8
di [redacted] - mercoledì, 13 dicembre 2017, 22:36

Buonasera [redacted]

Nel punto a) il segno della funzione non è del tutto corretto: per la parte dove è positiva dovevi scrivere -2<x<0 (li hai invertiti).

Nel punto c) non hai individuato i minimi: considera che l'intervallo è chiuso e limitato, cioè gli estremi sono compresi.

Nel punto d) non hai individuato il massimo: ricorda che anche qui gli estremi sono compresi nell'intervallo, essendo chiuso e limitato. Ragiona sulla definizione di massimo e minimo di un intervallo, dovresti trovare la risposta senza problemi, ma se non riesci chiedi pure.

Figura 3 – Commento alla risposta di Fig. 2

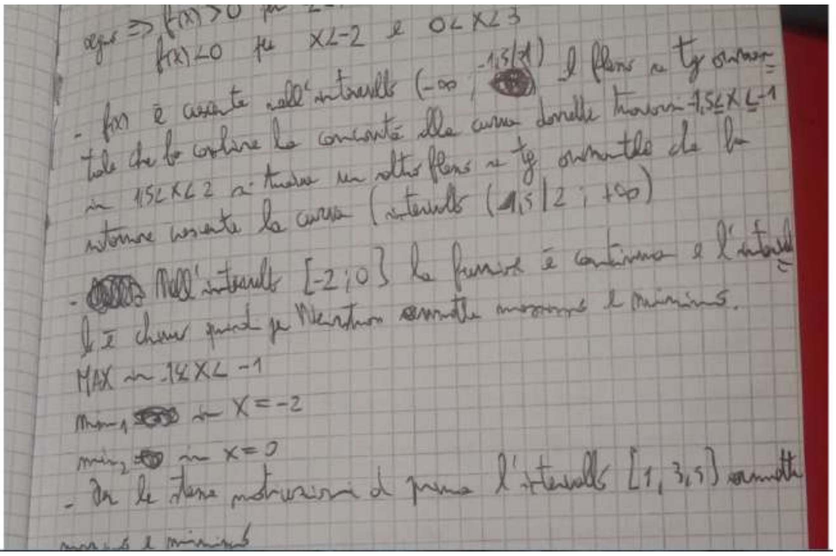


Figura 4 – Esempio di risposta con errori al LabMat online n. 8.

Nella successiva tabella (Tab. 2) è visualizzato un esempio di valutazione del lavoro dei vice-tutor, valutazione che, espressa alla fine dell'anno attraverso un voto, può far media con il voto dello scritto in sostituzione dell'orale. Ai fini della valutazione vengono analizzate sia la riposta personale al laboratorio sia le caratteristiche dei commenti alle risposte dei compagni e in particolare viene valutata la capacità di individuare se il lavoro di altri studenti è corretto o contiene errori e imprecisioni, e di fornire una diagnosi degli errori e input efficaci per la riflessione, che portino gli studenti a capire gli errori e a non ripeterli.


Re: LabMat online n. 8
di [redacted] - domenica, 21 gennaio 2018, 14:51

Ciao [redacted] l'esercizio 1 è corretto infatti hai individuato bene anche i max i min dei 2 intervalli citando Weierstrass.

Anche l'esercizio 2 è corretto

Permalink | Visualizza intervento genitore | Modifica | Sposta altrove | Elimina | Rispondi

Re: LabMat online n. 8
di Chiara Martinengo - domenica, 21 gennaio 2018, 16:17

Per [redacted] Segnalo due imprecisioni nella sua risposta.

Lei parla di flessi a tangente orizzontale, ma secondo me intende parlare rispettivamente di un massimo e di un minimo relativo e lì la concavità non cambia. C'è un flesso (circa in 0) che fa cambiare la concavità ma non è a tangente orizzontale.

Lei trova i punti di max/min negli intervalli considerati, ma non i valori max e min che erano quelli chiesti (sarebbe come se a qualcuno le chiedesse qual'è stata la temperatura massima tra le 8 e le 20 lei rispondesse alle ore 14).

Permalink | Visualizza intervento genitore | Modifica | Sposta altrove | Elimina | Rispondi

Figura 5 – Commenti alla risposta di Fig. 4

Vice-tutor gruppo	Valutazione risposta del vice-tutor al lab online	Valutazione lavoro come vice-tutor
SdM	Risposta buona: specifica anche il risvolto teorico di es. 1; una dimenticanza sulle potenze di 10 nell'es. di fisica (corretta)	*Lavoro abbastanza buono: rileva la maggior parte delle imprecisioni nella lettura del grafico (tranne un paio) e gli errori nei max/min mancanti, non sottolinea abbastanza la differenza tra max/min relativi e assoluti*
CTC-1	Risposta discreta, manca il minimo su un intervallo, non quantifica i valori del minimo e del Massimo	*Lavoro appena discreto: non rileva la confusione tra minimi e punti di minimo, rileva la mancanza di un estremo, ma fornendo un input debole, senza riferimento teorico, e senza mettere in rilievo la confusione tra max/Min assoluti e relativi*
CTC-2	Risposta con un errore nel Massimo/minimo, corretto nella seconda versione	*Lavoro abbastanza buono: rileva e fornisce input sugli errori sui Max/min, non rileva due piccole imprecisioni*
CTC-3	Risposta buona con lievi imprecisioni di forma	*Lavoro abbastanza buono: rileva se manca il Max o il min e invita a cercarli, non rileva una confusione tra minimo e punto di minimo e un'imprecisione nel teorema di Weierstrss. , non fa una diagnosi precisa commentando una risposta in cui non ci sono min/Max, meglio nel commento ad un'altra risposta con lo stesso problema*

CTC-4	Risposta buona, qualche leggera imprecisione	*Lavoro abbastanza buono: rileva sviste nella lettura del grafico, rileva errori sui Max/min, a e non rileva la confusione tra valore massimo e punto di massimo, migliora andando avanti*

Tabella 2 – valutazione vice-tutor LabMat online n. 8

Esperienze di interdisciplinarità.

Nei laboratori online svolti nell'a.a. 2017-18, sono stati introdotti diversi esercizi di carattere fisico e chimico; questa attività è stata svolta sia nell'ambito del corso sia nell'ambito del Laboratorio sui prerequisiti rivolto agli studenti con gli OFA. In questi esercizi, concordati con i docenti delle rispettive materie, la descrizione matematica di un certo fenomeno viene presentata tramite la relativa formula e l'esercizio prevede di dover semplicemente manipolare le formule date ed eventualmente applicare alcuni concetti di matematica di base.

E' stato ampiamente riscontrata la difficoltà, sempre rilevata dai colleghi dei corsi di Fisica e di Chimica, che alcuni studenti non sono in grado di trattare situazioni che prevedono la soluzione di semplici equazioni se il nome dell'incognita non è *x*. Ad esempio, alcuni studenti non hanno saputo risolvere l'equazione di secondo grado proposta dal seguente esercizio, assegnato in un laboratorio online sui Prerequisiti, a causa della presenza della variabile tempo t e di numeri decimali come coefficienti:

Per un corpo soggetto ad accelerazione costante a = 3.0 *m/s*^{2} *che si muove lungo l'asse x, con velocità iniziale* v_0=1.5 *m/s, lo spazio percorso si scrive:* $x(t) = v_0 t + ½ a t^2$.
Determinare in quanto tempo vengono percorsi 3.0m.

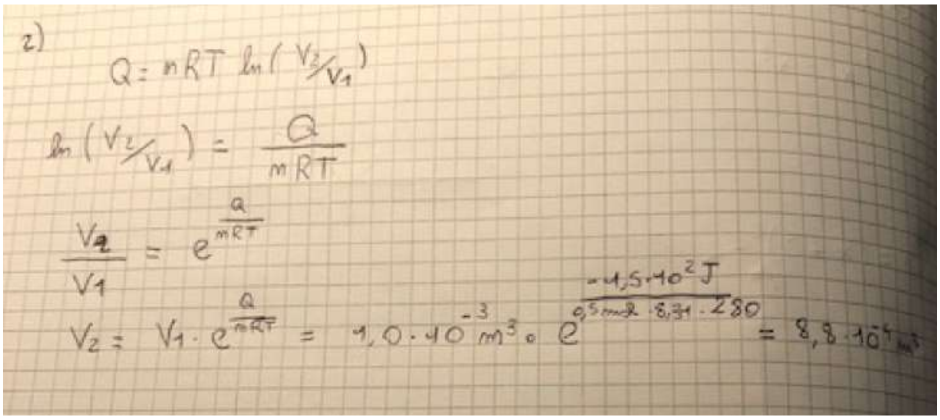


Figura 6 – Risposta corretta al LabMat online n. 1 - es. 2)

Come esempio di attività interdisciplinare proponiamo il seguente esercizio tratto dal LabMat online n.1:

2) *Per un gas perfetto che compie una trasformazione a temperatura costante, il calore scambiato si scrive* $Q = n\,R\,T \ln\frac{V_2}{V_1}$, *(dove ln è il logaritmo naturale, ossia in base e). Determinare il volume* V_2 *del gas sapendo che:*
Q = -1.5x10^2 *J, n =* 0,5 *moli, R =* 8.31 *J/mol K, T = 280 K e* V_1 = 1.0 x 10^{-3} *m*^{3}.

In Fig. 6, vediamo una risposta completa e ben strutturata, in cui lo studente ricava correttamente e nel modo più diretto il volume V_2 in forma letterale e poi sostituisce i valori accompagnati dalle rispettive unità di misura.

In Fig. 7 invece vediamo una risposta con un errore di calcolo (un logaritmo di un numero minore di 1 che da un valore positivo), di cui lo studente avrebbe dovuto accorgersi, come segnalato nel commento di Fig. 8. Inoltre in questa risposta lo studente sceglie di effettuare man mano i calcoli numerici, cosa che viene sconsigliata nel commento.

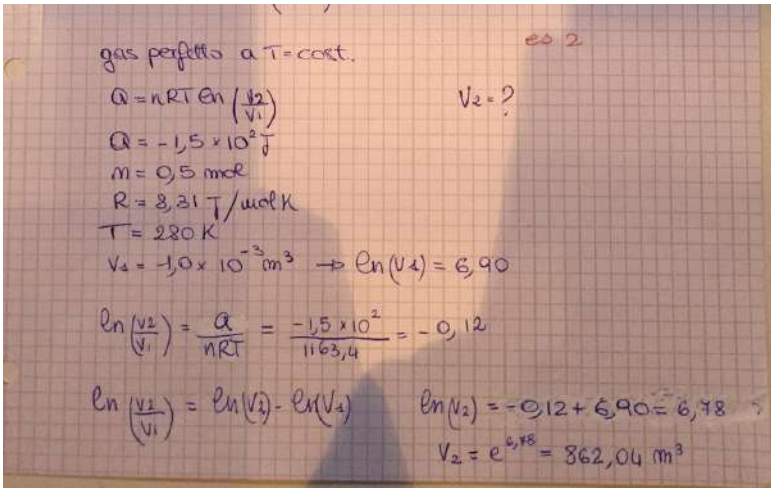
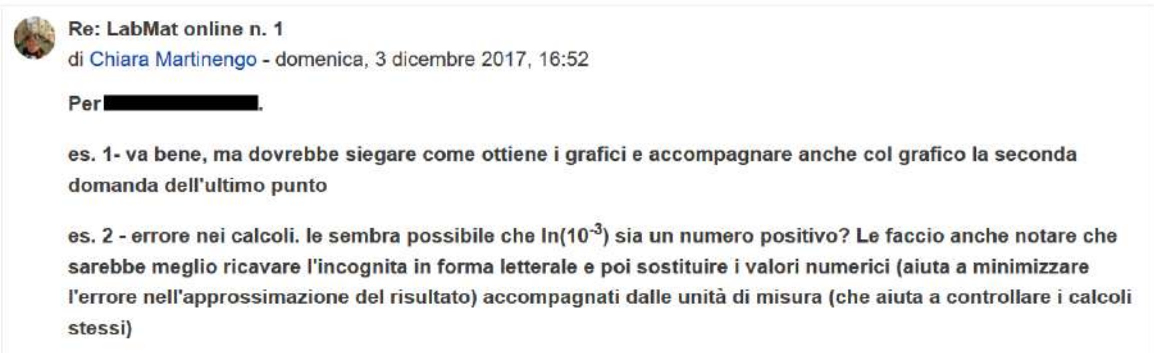


Figura 7 – Risposta errata al LabMat online n. 1 - es. 2)


Re: LabMat online n. 1
di Chiara Martinengo - domenica, 3 dicembre 2017, 16:52

Per [redacted].

es. 1- va bene, ma dovrebbe siegare come ottiene i grafici e accompagnare anche col grafico la seconda domanda dell'ultimo punto

es. 2 - errore nei calcoli. le sembra possibile che ln(10^{-3}) sia un numero positivo? Le faccio anche notare che sarebbe meglio ricavare l'incognita in forma letterale e poi sostituire i valori numerici (aiuta a minimizzare l'errore nell'approssimazione del risultato) accompagnati dalle unità di misura (che aiuta a controllare i calcoli stessi)

Figura 8 – Commento alla risposta di Fig. 7

Abbiamo constatato che gli studenti hanno apprezzato queste attività interdisciplinari, svolgendole volentieri, e anche quelli che all'inizio avevano difficoltà sono diventati più sicuri, prendendo confidenza con questo tipo di esercizi e arrivando a svolgere gli esercizi in modo corretto. Abbiamo inoltre constatato che queste attività interdisciplinari proposte nella modalità online sono molto utili sia per l'apprendimento sia per l'aspetto motivazionale. Infatti queste attività collegano la matematica alle discipline sperimentali che gli studenti hanno scelto come oggetto del loro percorso universitario; hanno quindi la possibilità di verificare come i contenuti matematici non sono concetti astratti a sé stanti, ma si utilizzano in diverse situazioni. Inoltre, la modalità online e il confronto con i loro compagni aiuta molti studenti a perdere quella soggezione o addirittura avversione verso tutto quello che "sa di matematica" che li blocca e demotiva nel loro operare.

Proposta di Laboratori online nella Scuola Secondaria

Sulla base di quanto descritto, riteniamo quindi che l'esperienza concreta di un approccio laboratoriale e di una didattica collaborativa risulta altamente formativa per tutti gli studenti, e in modo particolare per quelli che potrebbero dedicarsi nel futuro all'insegnamento di una disciplina scientifica, dando loro l'opportunità di apprendere sul campo utili strategie didattiche.

Riteniamo inoltre che questa esperienza possa essere adottata in modo proficuo anche dagli insegnanti della Scuola Secondaria Superiore con l'obiettivo sia di ottenere apprendimenti più consapevoli e duraturi, sia di motivare gli alunni allo studio della matematica, che purtroppo viene, spesso e a torto, considerata una materia difficile, noiosa e arida. Il raggiungimento di questi obiettivi può rendere molto più agevole e piacevole sia il percorso scolastico durante la Scuola Superiore sia il cammino universitario degli studenti che scelgono non solo corsi di studio della Scuola di Scienze o di Ingegneria, ma anche di Architettura o di Economia, cioè tutti quei corsi di Studio che adoperano la Matematica come strumento fondamentale per le loro discipline. Inoltre la scelta stessa di tali percorsi universitari può essere effettuata con più consapevolezza e maturità e contribuire quindi a limitare il fenomeno degli abbandoni.

Nelle Scuole Secondarie Superiori il ruolo di tutor, che come detto fa da trait d'union tra la figura del docente e lo studente, può essere ricoperto, con opportune turnazioni, da studenti degli anni precedenti. Tale ruolo può servire, non solo agli studenti destinatari del tutorato, ma anche agli studenti-tutor che hanno così l'opportunità di consolidare i loro apprendimenti e per i quali tale lavoro sarà oggetto di valutazione da parte dell'insegnante.

Riferimenti bibliografici

ALBANO G., FERRARI P.L., 2007, E-learning e ricerca in educazione matematica: un esempio di integrazione. In: Imperiale R., Piochi B., Sandri P. (Ed.) 'Matematica e difficoltà i nodi dei linguaggi', Bologna: Pitagora, pp. 118-123.

BARANA A, MARCHISIO M., RABELLINO S., 2016, Assessment of individual and collaborative e-learning in problem solving activities, 'Atti Convegno EMEMITALIA, 2016', pp. 1-13.

FERRARI P.L., 2006, Moodle all'U.P.O. Le opportunità offerte da Moodle per l'insegnamento universitario: il caso della matematica. In 'Atti del Convegno MoodleMoot Italia, II edizione.

FERRARI, P.L., 2011, Le potenzialità dell'e-learning in educazione matematica e il ruolo della ricerca, 'TD Tecnologie Didattiche', 19 (3), pp. 136-141.

MARTINENGO C., CURATELLI F., 2015, Laboratori e tutorati: proposte per affrontare le difficoltà in matematica dalla scuola primaria all' università, 'Atti del Convegno Nazionale GRIMeD n. 19', In Quaderni GRIMeD n.2, Torino: Il Capitello, pp. 126-135.

MARTINENGO C., CURATELLI F., 2017, Laboratori reali e virtuali: l'e-learning per una didattica collaborativa, 'Atti del Convegno Nazionale GRIMeD n. 20', In Quaderni GRIMeD n.3, Torino: Il Capitello, pp. 80-90.

MIDORO V., 2002, Dalle comunità di pratica alle comunità di apprendimento virtuale, TD-Tecnologie Didattiche 25 (1), pp. 3-10.

PESCI A., 2011[a], Sollecitare la riflessione meta-cognitiva in attività di tutoraggio per valorizzare le risorse di tutti gli studenti, In: 'Atti Matematica & Difficoltà n. 17' , Bologna: Pitagora, pp. 69-78.

PESCI A., 2011[b], Studi di esperienze collaborative in presenza per una loro eventuale implementazione online, 'TD Tecnologie Didattiche', 19 (3), pp. 183-188.

PESCI A., 2016, Imparare collaborando, 'Atti del Seminario GRIMeD', Taranto.

I PROBLEMI MATEMATICI, DA CROCE A DELIZIA.

ALLA RICERCA DI UN AMBIENTE DI APPRENDIMENTO

Annarita MONACO

Università La Sapienza, Roma(RM)

NRD, Bologna (BO)

Riassunto

Questo lavoro intende mettere in evidenza l'importanza di creare un ambiente di apprendimento che veda protagonisti i pensieri, gli atti e le rappresentazioni dei bambini, espressi in un clima di interazione, di reciproco ascolto e di discussione. I problemi veri costituiscono una sfida per i bambini: li impegnano nella zona di sviluppo prossimale, sollecitano l'uso di rappresentazioni e strategie spontanee che maturano e si definiscono nel confronto e nella messa a punto in gruppo. Si dilatano in aula i tempi che vedono gli allievi protagonisti e gli insegnanti diventano ascoltatori e osservatori. L'errore non è un fenomeno da stigmatizzare, ma un elemento costruttivo che, all'interno di uno spazio risolutivo di gruppo, stimola il problematizzare e l'argomentare. Quando si accetta, si affronta, si analizza e si supera l'errore, l'apprendimento è più profondo. Se l'errore non è superato, avviene comunque un bel lavoro metacognitivo, in un ambiente di apprendimento che ospita una comunità di menti che pensano e si emozionano, alla ricerca di una soluzione, senza mai arrendersi, prese dal gusto di elaborare e creare.

1. Il punto della questione.

Gran parte del tempo, nelle aule della scuola primaria, è dedicato ad attività di ascolto, da parte degli alunni, di spiegazioni dei loro docenti. Tanti sono gli esercizi scritti, proposti al fine di permettere il consolidamento e la verifica di una avvenuta acquisizione di regole e tecniche. I problemi presentati spesso sono essi stessi esercizi. Poche volte essi mettono realmente in gioco le componenti strategiche, comunicative e semiotiche dell'apprendimento matematico.

Cosa dire dei libri di testo? Le loro pagine contengono problemi già classificati come di addizione, di sottrazione, di calcolo di frazioni, con dati carenti e sovrabbondanti, per la risoluzione dei quali non appare necessario mettere in gioco particolari doti creative ed elaborazioni strategiche da parte degli alunni, che devono solo applicare l'itinerario risolutivo che già posseggono.

Eppure nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012 si legge: "La matematica (…) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e di discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. E ancora:"In matematica (…) è elemento fondamentale il laboratorio (…) come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive (…)". Continuiamo con la lettura: "Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione e una regola. Stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione dei pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che si intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive". In questo testo delle Indicazioni ogni parola sembra avere il suo peso.

Lo scenario che apre la sua lettura è chiaro e determinante per la progettazione del lavoro da parte del docente di matematica. Ma quanto ciò che si auspica nel testo ministeriale è realmente presente nelle nostre aule scolastiche? Forse ci sono dei fattori che impediscono la realizzazione di un ambiente così virtuoso e stimolante? In qualche modo è possibile che ci siano difficoltà che influiscono sulla definizione dei tempi giusti da dedicare in aula al confronto e alle discussioni per piccoli gruppi che hanno il compito di affrontare e risolvere veri problemi. Quali sono queste difficoltà? Sono solo di tipo oggettivo (mancanza di tempo) oppure c'è altro? Possiamo indagare in profondità l'area degli atteggiamenti degli insegnanti: le convinzioni sui problemi, sull'insegnamento e sull'apprendimento della matematica, sul ruolo degli insegnanti di matematica, e in tutto ciò dobbiamo tener conto degli aspetti emozionali, oltre che razionali: quanto è forte l'ansia di voler ricevere dagli alunni le risposte "giuste" in tempi brevi? Quanto è forte il timore di perdere tempo? E la preoccupazione di essere poco presenti come docenti che elargiscono sapere? Quanto è disponibile l'insegnante a interpretare ciò che dicono i bambini, nei momenti in cui gli permette di confrontarsi e di pensare? E' pronto ad interpretare il significato costruttivo delle loro produzioni, mentre cercano di costruire la risoluzione? Può essere che spaventi la percezione di non riuscire a controllare lo sviluppo delle conoscenze autogestite in autonomia dai bambini, e in particolare dai bambini nel gruppo, di farli trovare in situazioni in cui sperimentano *al buio*? La mente di un bambino può riuscire ad accogliere, gestire e risolvere problemi di fronte ai quali gli adulti stessi a volte possono avvertire difficoltà strategiche e concettuali, se si creano in aula situazioni *ad hoc*, a carattere collaborativo, che permettono la costruzione condivisa della conoscenza (Pontecorvo, 1993). Nelle ore di matematica è indispensabile creare in aula un ambiente dove si abbia il tempo e il modo di leggere con attenzione, analizzare, rappresentare, confrontare, discutere, escludere o scegliere sulla base di argomentazioni. Lavorare in piccolo gruppo rende i bambini più forti nelle situazioni di sfida, in quei momenti in cui si richiede la messa in campo di un atteggiamento positivo di ricerca e di cura del processo. L'insegnante può prendere coscienza di questa necessità ed attivarsi, mettendosi anche in discussione, per ricercare comportamenti ed effettuare scelte che siano efficaci, al fine di garantire processi risolutivi e di pensiero realmente utili e significativi per gli alunni.

1. Risolvere problemi cooperando con i pari

La grande scommessa da giocare in classe è quello di realizzare un ambiente generativo di conoscenza in cui si impara a pensare e ad apprendere dagli altri e con gli altri. In classe è possibile co-costruire valore aggiunto quando la diversità personale e culturale viene riconosciuta come una risorsa e fatta dialogare per coprire ciò che è collettivamente valido

(Miller, 1987, in: Dozza, 2007). La partecipazione attiva e costruttiva a gruppi di lavoro, intesi come vere e proprie sottocomunità di apprendimento, nutre la capacità di giudizio, di coordinamento e di aiuto reciproco (Dozza, 2007). Quali sono i comportamenti da mettere in atto nell'attività di risoluzione dei problemi? Su questo punto le indicazioni sono unanimi: bisogna leggere e rileggere il testo, stare calmi e ragionare. La ricerca più avanzata, nella prospettiva neopiagetiana e neovygotskijana, sostiene l'idea che il problem solving congiunto, ossia l'opportunità di discutere le differenze di opinione e di condividere il processo decisionale, porta ad un livello di comprensione che non è accessibile con i soli sforzi individuali o nell'interazione con collaborativa. Nel processo di co-costruzione gli allievi possono giungere a due punti di vista polari ugualmente giustificati e che si escludono a vicenda: sarà la ricerca di coerenza a spingerli a cercare di cambiare il presupposto collettivamente valido per risolvere la contraddizione (Dozza, 2007). L'argomentare e il giustificare attivano processi di trasformazione della comprensione basati sulla creazione di pensiero condiviso e sulla ridefinizione di ciò che è collettivamente e localmente valido (Rogoff, 1990). In tali processi l'argomentazione dei bambini con gli adulti e con i pari rappresenta una forma centrale di scambio sociale di primaria importanza (Miller, 1987).

2. La sperimentazione

L'attività di sperimentazione è stata attivata in una classe quinta primaria composta da 26 alunni. L'insegnante era di essa titolare fin dalla prima classe e insegnava, oltre che Matematica, tutte le altre materie curriculari, tranne Religione cattolica e Inglese.

L'insegnante, fin dalla prima classe, aveva cercato di attivare un tipo di lavoro didattico che coinvolgesse molto gli alunni in prima persona: ogni argomento era stato affrontato partendo sempre dalle loro idee, esperienze, conoscenze, e non veniva semplicemente *presentato* alla classe.

Aveva curato che i bambini utilizzassero il più possibile rappresentazioni spontanee, espresse nei vari registri semiotici. I bambini erano soliti affrontare altri lavori e spesso erano stati invitati a predisporre progetti al posto della maestra, in piccolo gruppo e poi in grande gruppo, in discussioni di classe.

All'inizio della classe quinta è stato ideato e messo a punto il seguente setting didattico: quattro alunni della classe, due maschi e due femmine, si dovevano cimentare nella risoluzione di un problema *sfida*, discutendo e confrontando strategie e rappresentazioni personali, al fine di pervenire ad una soluzione condivisa. Una volta messo a punto il processo risolutivo accettato da tutti i componenti del gruppo, era presentato alla classe intera.

Per la formazione dei gruppi, si acquisiva la disponibilità dei bambini a partecipare, non forzando in alcun modo la partecipazione, nella convinzione che l'attività dovesse essere svolta in un clima il più possibile sereno e scevro, nelle intenzioni, da ogni elemento di ansia. Ciò avrebbe facilitato la riflessione e le espressioni orale, gestuale e grafica di ciascun alunno. Nella formazione dei gruppi era curata una certa eterogeneità.

Durante lo svolgersi del processo risolutivo, gestito dal gruppo target alla lavagna, gli altri bambini della classe risolvevano lo stesso problema, sul proprio quaderno.

Per quel riguarda i problemi proposti, la scelta non è stata semplice. L'intento era quello di selezionare problemi che effettivamente potessero costituire una sfida per i bambini e che li impegnassero nella zona di sviluppo prossimale, in una situazione collaborativa, ma, nello stesso tempo, che non fossero eccessivamente difficili.

Per facilitare gli scambi tra i bambini e lasciare memoria dei processi risolutivi, sono stati messi a disposizione grandi fogli di carta quadrettata, delle stesse dimensioni della lavagna, e pennarelli di diversi colori.

Dopo aver scritto la traccia del problema da risolvere, in alto sul foglio, si invitava i bambini a leggere il testo ad alta voce e a dare poi avvio alla risoluzione di gruppo, utilizzando lo spazio restante del foglio per le loro rappresentazioni, da effettuare con i pennarelli di diversi colori messi a disposizione. Si chiariva che il processo doveva essere il più possibile gestito autonomamente, anche nell'alternarsi degli interventi.

Per quanto riguarda i tempi, non era stabilito un tempo limite. Generalmente si dedicava al problem solving un'ora nel corso di una mattinata, ma qualora il gruppo non perveniva alla soluzione il lavoro era aggiornato ad un'altra mattinata, nel corso della stessa settimana.

Tali esperienze, nate e realizzate all'interno di uno spazio didattico denominato *Laboratorio di problem solving*, sono state effettuate a cadenza settimanale.

3. Problemi e processi risolutivi

Presentiamo il primo dei tre problemi scelti per l'analisi dei procedimenti risolutivi.

a. Il problema della lumaca:

Una lumaca vuole salire un muro altro 7 metri. Parte dalla base la mattina di un giorno e sale due metri fino al tramonto; ma poi durante la notte scivola giù di un metro. Riparte la mattina dopo e così via: durante il giorno sale di due metri, durante la notte scivola di un metro. Quanti giorni impiega per salire in cima al muro?

Sono state realizzate dai bambini diverse rappresentazioni grafiche. (Fig. 1)

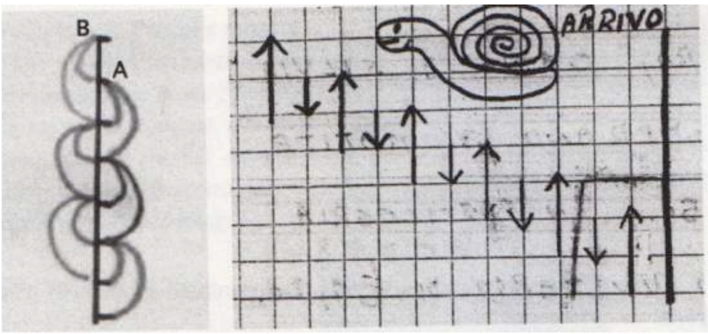


Figura 1 (esempi di rappresentazioni: Sara e Raul)

Molto interessante la discussione sull'arrivo in cima al muro. Qualche allievo pensa che, giunta in cima, la lumaca, nella notte successiva, scivoli in basso di un metro, per poi risalire di due metri il giorno successivo. Ecco uno stralcio dell'interazione discorsiva:

- *No, ho sbagliato qualcosa. Allora: viene 6 [giorni], ma ho notato che questo pezzetto, visto che riscende di uno…*

- *Poi risale, un altro giorno. Fa così: se un giorno sale di due, fa così: uno sale e poi zompa il muro…*

- *Ma mica poi arriva nell'aria, eh. Se ha già finito, perché riscende?*

- *Io poi qua ho notato una cosa: sei giorni, ma non ero sicura perché se lui fa così.. poi fa il secondo giorno, il terzo, il quarto, ma al sesto arriva qua* (indica), *non arriva sopra* (indica).

- *E allora ci metterà 7* [giorni]. *Siccome fa due metri, fa uno e poi arriva, no?*

- *E perché quando arriva ha finito, che fa riscende?*

- *E dice che la notte scivola comunque, eh…*

- *La notte scivola, capito? Perché le ventose…*

- *Scivola quando sta sul muro; poi, se è arrivata alla fine, perché scivola*?

- *La notte scivola per forza…*

- *Va be'…*

- *Quindi io ho visto che ci mette sei giorni, ma poi fa pure quest'altro pezzetto…*(indica).

-*Io non sono d'accordo su questo. Io ho disegnato le frecce di due lati quadretto per indicare la lumaca che sale di due metri e le frecce di un lato quadretto che indicano che la lumaca scende di un metro. Poi ho contato: uno, due, tre, quattro, cinque e sei, ed è rimasta là. Se torniamo in giù non arriva alla cima.*

-*La risposta allora qual è?*

-*E' 6.*

-*Per me sì. Perché se noi facciamo come dice Sara non va bene. Raul ha ragion*e a lasciarla così, perché se noi la facciamo scendere rimane qua, non ci arriva mai in cima.

-*Io adesso mi sono convinta perché ho pensato che nel testo si chiede:"Quanti giorni ci mette?". E' la domanda. Per me hanno ragione loro perché, se noi la facciamo scendere, rimane qua (indica), non ci arriva mai in cima.*

Questa è una sintesi del procedimento risolutivo del primo gruppo.

Sara avvia il lavoro con una rappresentazione che spiega dettagliatamente. In un primo momento si confronta con Marco: i giorni sono 6 oppure sono 7? Marco ritiene che siano 7 e spiega il perché. In questo dialogo si inserisce Raul che timidamente osserva che la lumaca, una volta arrivata, non torna più indietro. Questa idea però confligge con le indicazioni date dal testo:"la lumaca di giorno sale di due metri e di notte scivola di un metro" e Sara difende a lungo la convinzione che i giorni possano essere più di 6; in questo è sostenuta da Martina. A sbloccare l'impasse interviene ancora Raul, che presenta una sua rappresentazione e la spiega. Afferma la sua convinzione che i giorni sono 6; questa volta riesce a convincere i compagni del gruppo che accettano e motivano il loro accordo.

Presentiamo il secondo dei problemi.

b. Panini e monete:

Piero e Francesco partono per una gita a piedi. Piero mette nel suo zainetto 5 panini e Francesco ne mette 7 nel suo. Lungo la strada incontrano uno sconosciuto, affamato, ma senza provviste. Decidono, allora, di mettere in comune i loro panini e mangiamo tutti e tre lo stesso numero. Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il favore ricevuto, lascia loro 12 monete. Come dovranno essere suddivise le monete fra i due compagni.

Di seguito sono riportati i passaggi principali della risoluzione:

Primo passo: l'avvio.

Dopo aver messo in chiaro i dati del problema, viene imboccata una prima strada:

- *Se i panini sono 12 e le monete sono 12, ogni panino vale un euro. Quindi Francesco ha 7 panini e avrà 7 monete.*

Secondo passaggio: lo sviluppo della discussione.

Questo tentativo non riscuote l'approvazione di tutto il gruppo. A questo punto ci si concentra sui 4 panini mangiati dallo sconosciuto e sul fatto che i due bambini non hanno dato allo sconosciuto lo stesso numero di panini:

-*I panini in tutto sono 12: 5 sono di Piero e di Francesco. Francesco, che ce n'ha di più gliene dà 3 e Piero gliene dà uno. Allora: 3 di Francesco più uno di Piero li danno allo sconosciuto. Quindi Piero mangia i quattro suoi e Francesco i quattro suoi. Quindi Francesco dovrebbe avere una somma più alta. Noi dobbiamo proporzionare ora i 12 panini con le monete.*

Terzo passaggio. La chiave del problema:

- *4 li mangia una persona. Ne avanzano 3, e ne prendo un altro di questi (dei cinque di Piero). Per me Francesco non ci deve avere 7 monete e nemmeno Piero 5 monete. Lo sconosciuto mangia 3 panini di uno e 1 di un altro.*

Quarto passaggio. Il passo decisivo:

-*Ho avuto un lampo di genio. Lui* [Francesco] *ce ne ha 9 e lui* [Piero] *ce ne ha 3.*

-*Secondo me, visto che gliene danno 4 in tutto, lo sconosciuto dà 3 euro per panino…*

Viene a questo punto giustificato l'abbandono della prima idea di soluzione

-*Perché noi all'inizio avevamo contato che lui i soldi glieli dava pure per i panini che lui non si mangiava.*

Concludono:

-*Ah, è vero! Invece i soldi glieli dà solo per i panini che lui si mangia. Cioè* 4.

-*E quindi 3-6-9 per Francesco e 3 per Piero.*

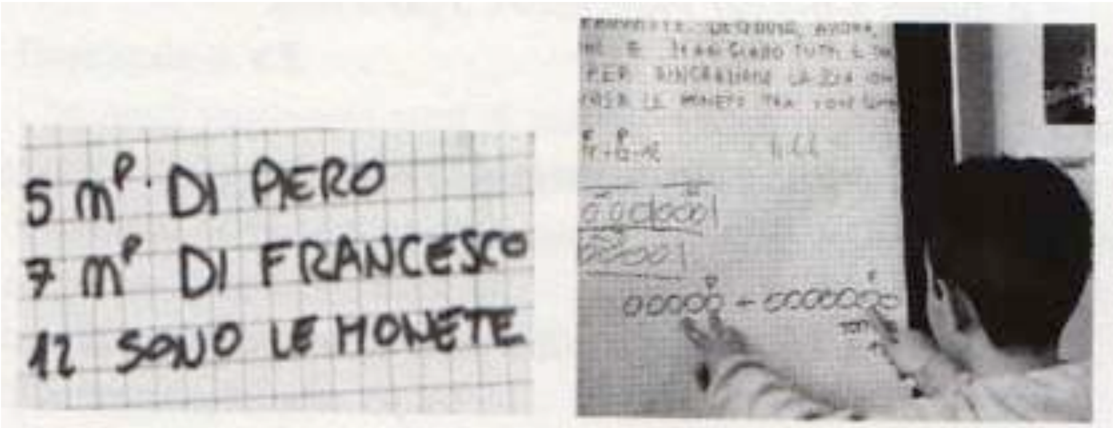


Figura 2: (Federico studia la sua rappresentazione)

Questa è la sintesi del procedimento risolutivo del secondo gruppo:

Federico introduce scrivendo i dati del problema; Beatrice prosegue effettuando una rappresentazione al fine di calcolare quanti panini vanno a ciascun bambino. Avanza poi una prima ipotesi: Francesco ha dato più panini allo sconosciuto, quindi dovrebbe avere più soldi. Si sviluppa un fitto scambio interattivo nel gruppo. A un certo punto Federico riporta il gruppo alla domanda del problema: “Quante monete andranno a Piero e quante a Francesco?” Si elaborano le prime risposte: Giulia propone che bisogna dare un valore ad ogni panino. Antonio osserva che, delle 12 monete, 5 vanno a Piero e 7 vanno, nella convinzione che ogni panino abbia il valore di una moneta. Giulia si oppone a questa soluzione e ribadisce che Francesco ha dato un numero maggiore di panini, ma non va oltre. A questo punto interviene Federico che, dopo aver effettuato una breve sintesi di quanto detto dai compagni, dice che bisogna *proporzionare* i soldi con i panini, avendo di fronte la sua rappresentazione e studiandola con attenzione. I bambini riprendono le idee emerse, finché Federico riceve un’*illuminazione* mentre osserva la sua rappresentazione, seguito dagli altri bambini. Si rendono tutti conto dell’errore che impediva di arrivare alla soluzione e affermano con convinzione la loro definitiva risposta: 9 euro vanno a Francesco e 3 a Piero.

Presentiamo il terzo dei problemi.

c. Gli allievi di Pitagora

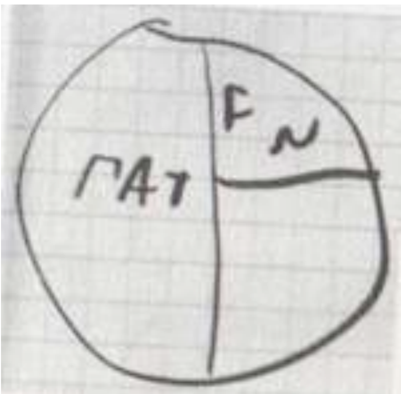
Si racconta che Pitagora, parlando dei suoi allievi, disse un giorno

La metà dei miei discepoli studia matematica; la quarta parte studia i fenomeni della natura; 1/7 si esercita al silenzio e alla meditazione; inoltre ho 3 allieve. Quanti sono, tra maschi e femmine, gli allievi di Pitagora?

Di seguito è riportato uno stralcio con le interazioni discorsive dell’ultimo tratto del processo risolutivo.

- *(...) La domanda chiede quanti sono e non quanta pa*rte.
- (…) *dobbiamo riuscire a calcolare; dobbiamo prima scegliere un numer*o.
- *Mate…50. Poi c’è un quarto.*
- *Se fai un settimo bisogna calcolare una torta in cui ha sette parti…*
- *Un numero divisibile per 7 che poi dà a sua volta un numero divisibile per 4…*
- *Cerchiamo un numero pari, divisibile per 4 e per 7…*
- *Parla di tre femmine, ma non ha detto dove ce l’ha.*
- *Per me non le considera le femmine…*

- *Tra maschi e femmine, le considera…Basta mettere 3 femmine qua e il risultato è 28.*
- *Però, se avete notato, come posso dire, c'è un resto, e questo resto è di 3.*
- *Come dice il testo, bisogna aggiungere tre persone che sono femmine…*
- *Infatti io ho addizionato 14, che era la metà, più 7 che era un quarto, più 4, che era un settimo.*
- *E più il resto.*
- *Il risultato è 28.*
- *Fine!*



(Figura 3: la rappresentazione di Andrea)

Questa è la sintesi del procedimento risolutivo del terzo gruppo:

Andrea propone la rappresentazione del diagramma a torta perché ricorda che sul suo libro di testo le frazioni sono state presentate così; prova ad effettuare una prima partizione (fig.3). Giulia ignora questa proposta e propone un'altra sua rappresentazione, ma con essa non riesce a procedere. Si ritorna alla rappresentazione di Andrea che appare essere quella più feconda a tutti i componenti del gruppo. Giulia dice che bisogna ipotizzare un numero giusto da cui partire. Andrea non comprende subito che la proposta di Giulia è in continuità con la sua. Giulia, a questo punto, rassicura Andrea. Da questo momento in poi la torta è il modello di rappresentazione ratificato da tutto il gruppo e sarà infatti utilizzata per tutto il tempo del procedimento risolutivo. Ad un certo punto dell'interazione viene proposto un elemento chiave per arrivare alla soluzione: il numero totale degli alunni deve essere contemporaneamente divisibile per 2, per 4 e per 7. I bambini, tuttavia, ancora non arrivano a soluzione e il processo appare essere lungo. Il gruppo aggiorna il suo lavoro ad un'altra mattina; a quel punto Beatrice intuisce il suo errore e trova la soluzione, che verrà poi spiegata al resto della classe dai componenti da due componenti del gruppo che si alternano con sicurezza, gestendo il tempo del racconto come se fossero un'unica voce.

4. Intervista ai risolutori

Alla fine degli incontri di Laboratorio sono stati intervistati i bambini, per acquisire elementi anche sui loro vissuti esperienziali. L'insegnante ha posto le seguenti domande:

5. *E' stata un'esperienza positiva oppure negativa partecipare ai gruppi di problem solving?*
6. *Ci sono stati dei momenti nei quali ti sei trovato in difficoltà?*
7. *Con quale atteggiamento hai reagito alle difficoltà?*
8. *Con quali compagni senti di essere riuscito a comunicare meglio nel gruppo? Con quali meno bene? Spiega le tue ragioni.*
9. *Esprimi liberamente cosa senti di dire ancora rispetto a questa esperienza, se vuoi.*

Si riportano alcune risposte:

- *I problem solving ci aiutano ad affrontare le nostre paure e a imparare ad affrontare i problemi con gli altri e a interagire con loro.*

- *Perché ho iniziato a sforzarmi e pensare e trasmettere le mie idee ai miei compagni*

- *Ragionare con gli altri mi ha fatto capire che l'unione fa la forza, cioè che abbiamo ragionato con gli altri e infine anche risposto insieme.*

- *Il problem solving mi ha aiutato soprattutto a migliorare le mie abilità di ragionamento e di risoluzione, e anche la capacità di trasformare un'idea secondo un altro parere e non di ragionare singolarmente.*

- *Mi sono trovato bene con tutti, perché tutti mi hanno aiutato a livello di ragionamento e nessuno mi demoliva il ragionamento. Alcuni compagni sono riusciti a risolvere con il mio ragionamento. Tutti mi hanno aiutato ma hanno anche concretizzato le mie ipotesi.*

- *La mia esperienza è stata bella, perché ho parlato e ho detto quello che ho pensato nel mio cervello.*

Alcuni bambini hanno richiamato situazioni di impasse che hanno vissuto nel corso del lavoro di gruppo e raccontato quali comportamenti hanno messo in atto per superarle.

5. Conclusioni

I risultati della sperimentazione presentata pongono all'attenzione i seguenti aspetti:

1. l'atteggiamento dell'insegnante dovrebbe evolvere sempre di più, nella direzione dell'essere disponibile a realizzare un ambiente di apprendimento collaborativo, nel quale possano emergere, essere accolte e valorizzate le espressioni strategiche, comunicative e rappresentative dei bambini.
2. In aula dovrebbero essere dilatati i tempi che vedono i bambini protagonisti. L'espressione dei loro mondi semiotici può creare un circolo virtuoso di intrecci meta cognitivi che influenza in modo in cui i bambini affrontano i problemi, che non sono più noiosi e scontati, ma occasioni stimolanti di pensiero e argomentazione, in una situazione protetta e serena.
3. L'errore può essere valorizzato per la sua dimensione costruttiva. All'interno di un gruppo, non è un elemento da temere e da stigmatizzare. E' un punto da cui si parte per discutere, problematizzare, argomentare e che, una volta superato, produce un apprendimento più squisitamente metacognitivo.

Tutto ciò può contribuire alla creazione di un ambiente di apprendimento che può richiamare l'idea di una comunità di pensiero nella quale si riflette, si analizza, ci si confronta, ma mai ci si arrende e tanto meno ci si sente frustrati.

Riferimenti bibliografici

ARRIGO G.(2014). Conversione e trattamenti semiotici nel problem solving. Bollettino dei docenti di matematica, 69. Bellinzona (Svizzera):UIM-CERDD, pp. 85-103.

D'AMORE B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione dei problemi di matematica. La matematica e la sua didattica. 3, pp. 328-370.

D'AMORE B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività della classe intesa come società. La matematica e la sua didattica. 3, pp.325-336.

D’AMORE B., FANDINO PINILLA M.I., MARAZZANI I.(2004). «Esercizi anticipati» e «zona di sviluppo prossimale»: comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. La matematica e la sua didattica, 2. pp.71-95.

DOZZA L.(2007). Apprendere cooperando con i pari. In “D’Amore B., Sbaragli S.(a cura di). Allievi, insegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica. Bologna: Pitagora.

LOIERO S., SPINOSI M. (2012). Indicazioni nazionali per il curriculo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione. Fare scuola con le Indicazioni. 249-330. Napoli: Tecnodid Editrice.

MILLER M.(1987). Argomentation and cognition. In: Hickman M.(a cura di). Social and Functional Approaches to Language and Tought. San Diego, CA: Academic Press.

MOLINARI L.,(2010). Alunni e insegnanti. Bologna: Il Mulino.

MONACO A. (2016). III. Didattica 49 1. La risoluzione dei problemi matematici: strategie e rappresentazioni spontanee in evoluzione1. Bollettino dei docenti di matematica, 9.

PONTECORVO C. (1993) (a cura di). La condivisione della conoscenza, Firenze: La Nuova Italia.

RADFORD L., DEMERS S.(2006). Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica. Bologna: Pitagora.

ROGOFF B. (1990, trad. it. 2006). Imparando a pensare. L’apprendimento guidato nei contesti socio-culturali. Milano: Raffaello Cortina.

VYGOTSKIJ L.S.(1978). Mind in Society. The development of Higher Psycological Processes. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

ZAN R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 30 A-B, p. 741-762.

UN AIUTO CONCRETO ALL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA: STRATEGIE EDUCATIVE ATTRAVERSO IL CORPO E IL MOVIMENTO.

Paola RICCI
Didatta formatrice in Psicomotricità Funzionale ISFAR (FI)

Il mio contributo vuole orientarsi ad una breve analisi di ciò che condiziona l'apprendimento della matematica in una visione psicomotoria funzionale cioè in un'attenzione allo sviluppo globale della persona.
La prima domanda da porsi è definire da cosa nasce la difficoltà ad apprendere.
Ogni qualvolta non riusciamo ad apprendere qualcosa significa che non abbiamo sviluppato le competenze necessarie a quell'esperienza. La causa delle difficoltà ad apprendere la matematica è quindi legata al mancato sviluppo delle "strumentalità" necessarie.
La psicomotricità funzionale è pedagogia del movimento, è una metodologia educativa che si avvale del movimento per accedere alla sfera operativa, cognitiva, affettiva e relazionale e si occupa di osservare e sostenere lo sviluppo dell'essere umano.
La psicomotricità funzionale vuole aiutare l'insegnante a riconoscere le difficoltà dell'allievo e soprattutto a promuovere un autentico sviluppo anziché porre un'etichetta. Vuole offrire una educazione globale e non parcellare, che riconosce bisogni e punti forza dell'individuo attraverso l'analisi e lo sviluppo delle competenze. Tiene conto che il processo di sviluppo dell'uomo dipende parallelamente dalla maturazione biologica in una visione globale e multi-sistemica e dalla qualità della relazione che egli instaura con l'ambiente, che ne accoglie e stimola l'evoluzione offrendo esperienze di attivazione delle autonomie e di sviluppo dell'efficacia.

Altro punto chiave è definire cosa si intende per apprendimento.
In un approccio educativo dell'essere umano l'obiettivo non è apprendere qualcosa ma sostenerne lo sviluppo globale.
Jean Le Boulch, padre della psicomotricità funzionale, a questo proposito afferma:

"Un apprendimento non ha possibilità di riuscita
se il soggetto non ha raggiunto il livello funzionale richiesto"

Ogni apprendimento è da considerarsi tale quando crea sviluppo nell'individuo, quando cioè determina una trasformazione delle strumentalità già presenti in nuove abilità e competenze che consentono di elaborare nuove soluzioni nel confronto con i problemi che l'ambiente offre.
E in particolare, a proposito dell'apprendimento della matematica, Le Boulch scrive:

"I problemi posti dalla strutturazione percettiva svolgono un ruolo fondamentale nella genesi delle difficoltà nella matematica ... il bambino accede a uno spazio percettivo euclideo di natura intuitiva, prodotto complesso di un'attività senso - motoria. Ma passeranno parecchi anni tra questa percezione dello spazio e la rappresentazione mentale di uno spazio orientato, a partire dal quale le immagini anticipatorie permetteranno di situare gli oggetti, gli eventi e le loro trasformazioni. Per fornire un'adeguata teoria dell'intuizione geometrica bisogna dunque dissociare lo spazio percettivo dallo spazio rappresentativo."

Quindi l'uomo, per raggiungere una reale evoluzione cognitiva, che permetta l'intuizione e l'astrazione a livelli superiori, deve avere nel suo bagaglio di conoscenza tutti i meccanismi provenienti dalle esperienze che la precedono e ne sostengono la maturazione.

Prendiamo in analisi quindi uno sviluppo che deve sottostare ai tempi di maturazione biologica, alle esperienze reali che il bambino vive, alla relazione che egli instaura con l'ambiente che si prende cura di lui/lei e infine alle caratteristiche del singolo individuo e alla loro valorizzazione.

La maturazione neurologica ovviamente ci offre tempi e successioni nell'acquisizione di nuove strumentalità disponibili: la conoscenza per tentativi ed errori, la conoscenza discriminativa, la programmazione mentale e simbolica.
Il bambino da 0 a 3 anni sviluppa disponibilità alla relazione con l'ambiente in uno scambio senso-motorio e percettivo-motorio che offrono l'acquisizione delle prime competenze coordinative, di controllo tonico e attentivo.
Da 3 a 6 anni la maturità della corteccia percettiva offre il momento ideale per attivare una attenzione discriminativa verso l'esterno e verso il proprio corpo.
Da 6 a 9 anni si sviluppano nella corteccia nuove interconnessioni sinaptiche che offrono la possibilità di accedere alle conoscenze già acquisite e programmare mentalmente nuove risposte più complesse e magari ancora mai sperimentate.
Ne consegue che tre diversi step di competenza-conoscenza appartengono alle diverse modalità di apprendimento:

il 1° step, la conoscenza per tentativi dove l'errore offre l'opportunità di sperimentare, con finalità intenzionali, diverse strategie e organizzazioni motorie e di pensiero.
Quando parliamo di tentativi, è sottintesa l'intenzionalità e la volontà di scoperta che sono alla base della ricerca di una soluzione al problema che l'ambiente ci ha posto.
Quindi una partecipazione attiva e non un apprendimento per condizionamento. Quindi il desiderio di scoperta, nutrito dall'esperienza piacevole e positiva che si instaura con l'ambiente, è alla base dello sviluppo di questa competenza.

il 2° step, la conoscenza discriminativa che offre la possibilità di scelta legata a reali parametri percepiti e riconosciuti. Anche in questo caso la nostra esperienza emotiva e le conoscenze pregresse vanno a condizionare ciò che riconosciamo e discriminiamo. Poniamo spontaneamente l'attenzione su ciò che ci rassicura e di cui abbiamo esperienza. Di qui l'importanza di esperienze sensoriali multiple.

il 3° step, la conoscenza percepita e memorizzata, che elaborata mentalmente, conduce alla capacità di astrazione e di risoluzione prima per ragionamento e poi per intuizione. La rappresentazione mentale offre inoltre la possibilità di utilizzare diversi codici simbolici contemporaneamente.

Solo quando sono raggiunte pienamente queste aree di competenza l'individuo assume libertà di espressione e ricchezza di elaborazione.
Queste diverse competenze si innescano integralmente solo se l'individuo diviene partecipativo, attivo e propositivo nella scoperta del mondo circostante (di cui anche la

matematica fa parte), in modo da permettere la massima espressione delle proprie potenzialità e individualità.
Questo presuppone l'instaurarsi di una relazione positiva e stimolante con un ambiente fatto di persone, oggetti, spazi, tempi, concetti, ecc… che permette spazi e tempi di adattamento personale e unico.
È infatti solo grazie all'avvio di uno scambio relazionale intenzionale e motivato che si vengono ad attivare interesse e attenzione quali fondamentali prerequisiti energetico-affettivi atti ad innescare i successivi processi di ricerca personale e soggettiva delle soluzioni alle proposte dell'ambiente.
Questo non è tanto legato all'età ma alle reali competenze disponibili e che quindi l'ambiente deve riconoscere e nutrire nella maniera più opportuna.

Il corpo, meraviglioso strumento di esperienza-conoscenza, registra emozioni e pensieri e orienta nuove intenzionalità e capacità di attenzione. La ricchezza delle esperienze nutre le competenze operative e la capacità di autoregolazione e di aggiustamento alle diverse situazioni offrendo opportunità di evoluzione globale delle competenze.
La relazione con l'ambiente, fondamentale nello sviluppo dell'individuo e delle sue competenze, deve offrire metodi di insegnamento attivi che donano tempo di elaborazione, tempo di ascolto e attenzione al singolo.
Ho voluto evidenziare alcuni aspetti dell'importanza della qualità della relazione sullo sviluppo richiamando alcuni autori:
Piaget: leggi di equilibrio / importanza della relazione ambiente-persona come fonte di stimolo a cui la persona si deve aggiustare trovando una sua risposta.
Jean Le Boulch: sottolinea che fino ai 2-3 mesi di vita lo sviluppo dell'essere umano è preordinato biologicamente e successivamente l'ambiente diviene sempre più importante offrendo opportunità di aggiustamento autonomo e occasioni di crescita senza cui lo sviluppo si rallenta.
Vygotsky: lo sviluppo cognitivo è un processo sociale e la capacità di ragionare aumenta nell'interazione con i propri pari e con persone maggiormente esperte.

La relazione è innegabile è anche fonte di emozioni e anche le emozioni esercitano una grande influenza sullo sviluppo dell'individuo.
Jean Le Boulch già negli anni '70 sosteneva l'influenza delle emozioni negli apprendimenti. Nei processi neurologici di sviluppo dell'attenzione e dell'intenzionalità, ha evidenziato come qualunque esperienza porti con sé ricordi positivi o negativi che ne determinano la memoria quantitativamente e qualitativamente. La direzione della volontà che ne scaturisce, nel ricercare o evitare quell'esperienza, orienta nell'individuo conseguenti intenzionalità e capacità di attenzione.

Ma cosa dice la scienza a proposito della relazione con l'ambiente nello sviluppo della persona?
Nei moderni studi di neuroscienze si evidenzia sempre più l'influenza che l'ambiente esercita sullo sviluppo umano. Di fatto è stato spazzato via il preconcetto che lo sviluppo e l'organizzazione del cervello dipendano strettamente e in modo quasi esclusivo dal patrimonio genetico; oggi si sa, che il 50-70 % della struttura cerebrale è di origine epigenetica, cioè ambientale.
Anche l'idea che le funzioni cerebrali fossero rigidamente localizzate e parcellizzate è stata superata. Oggi si sa che le mappe cerebrali possono essere riorganizzate e potenziate con l'esperienza e la volontà, addirittura in qualunque età. Quindi una nuova prospettiva scientifica che offre la visione per cui il cervello diviene "organo di adattamento sociale", cioè

la mente cresce e si organizza nutrendosi di relazioni oltre che di elementi chimici, e la mente (propria e altrui) opportunamente orientata, è un potente vettore di crescita e trasformazione (neurogenesi) cerebrale.
Pertanto la biochimica agisce sulla sinapsi neurale, mentre le relazioni significative agiscono sulla sinapsi sociale che collega fra loro le menti in relazione, tanto da affermare che non può esistere uno sviluppo realmente individuale.

Le neuroscienze confermano l'influenza che le emozioni rivestono nello sviluppo dell'individuo.
Oggi si sa che il cervello ha la sua riserva di cellule staminali annidate nella profondità dell'ippocampo (area strettamente connessa all'emotività) e che la neurogenesi è sempre possibile ed epigeneticamente (produzione di un organismo) determinabile addirittura in tutte le età della vita.

Quali sono le caratteristiche per cui l'ambiente influenza lo sviluppo?
In generale tre momenti caratterizzano la relazione: ricevere lo stimolo, elaborare la risposta, offrire la risposta.

- La qualità della relazione influenza gli apprendimenti.

Nello scambio affettivo: ricevere e offrire sono strettamente legati alla qualità della relazione, elaborare è legato all'affettività e all'interesse.

- La qualità degli apprendimenti influenza la relazione.

Nello scambio operativo: ricevere dipende dalla funzionalità dei 5 sensi e della capacità di attenzione, offrire è legato alla qualità delle prassie, elaborare è legato a intenzionalità, qualità dei processi mentali e conoscenza.

La relazione, l'esperienza e la conoscenza hanno evidentemente grande influenza sulla capacità di apprendere, ma la percezione è comunque sempre soggettiva, legata a potenzialità e difficoltà; lo stimolo che riceviamo dall'ambiente viene filtrato attraverso le nostre reali "conoscenze".

"Anche se la finestra è la stessa non tutti quelli che vi si affacciano vedono le stesse cose.
La veduta dipende dallo sguardo"
Alda Merini

E la scuola cosa propone? Prevalentemente addestramento!
Alcuni esempi:

- Posiziona l'orsetto a destra o a sinistra del tavolo… come se il tavolo avesse una destra e una sinistra…
- La conoscenza della destra e della sinistra e l'interpretazione degli orientamenti possono anch'essi trarre in inganno: in base a cosa vengono definite figure che non hanno un davanti e un dietro e quindi non hanno neppure una destra e una sinistra, in relazione spaziale fra loro?
  Per esempio figure senza faccia e con la faccia.
- Un bambino che arriva a conoscere i concetti topologici di sopra, sotto, dentro, fuori, vicino e lontano con il corpo, ma che non ha ancora trasferito questi concetti nella rappresentazione mentale e nello spazio grafico, potrebbe avere difficoltà a comprendere la richiesta di scrivere "sopra" alla linea, potrebbe infatti interpretarlo così: ~~ABCD~~

e avere più difficoltà sul piano trasversale del banco che sul piano frontale rappresentato dalla
lavagna…

- Possiamo chiedere, vai davanti a Francesca, dietro a Giulia… ma non vai davanti al cerchio, il cerchio non ha un davanti…

Il bambino che si avvicina alla matematica ancora non sa scrivere. Spesso non gli è stata offerta la possibilità di imparare a legarsi le scarpe perché ritenuto troppo difficile…
Non si lava o veste da solo perché non c'è tempo per offrirgli questa esperienza, "tanto lo sa fare"…
Non gli viene chiesto di stare seduto a tavola perché si annoia… spesso viene ancora imboccato…

Quando questo bambino, che si trova a confrontarsi con le materie curricolari, ha ancora moltissime competenze indispensabili mai sperimentate e la sua attenzione immancabilmente è direzionata verso la fatica di organizzare il corpo a stare seduto, a prendere la penna con la giusta prensione, a usarla con la giusta forza per non fare buchi, a saper utilizzare la gomma senza stropicciare il foglio, a saper appuntare il lapis, a lasciare traccia dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, a fare automaticamente i cerchi e gli occhielli in senso antiorario, a sapere da dove si comincia a scrivere e verso dove (competenza spazio-temporale), ad avere la capacità di focalizzare l'attenzione su un punto e contemporaneamente sulla globalità, a riconoscere forme e sequenze e saperle riprodurre, a riconoscere suoni e ritmi sonori e a saperli riprodurre, a usare linguaggi simbolici verbali e grafici, a comprendere ciò che scrive e ciò che legge…

Il sistema nervoso centrale, che mette in relazione il dentro con il fuori, le percezioni con le azioni, i processi affettivi con quelli cognitivi, è unico e crea una rete fra tutti i sistemi.

Elasticità, adattabilità, memorizzazione, automatizzazione, astrazione sono processi che necessitano agli apprendimenti in genere e in particolare all'apprendimento della matematica, ma la loro costruzione avviene gradualmente nello sviluppo delle capacità di base, quindi delle funzioni che il bambino fino ai 9-12 anni sperimenta imparando con il corpo e il movimento.
Anche per la matematica tutto è relativo al "punto" da cui osserviamo in relazione a sviluppo, esperienza, disponibilità relazionale e individualità.
Il bambino deve poter vivere esperienze positive e stimolanti, deve divenire attivo e propositivo, sviluppare intenzionalità e creatività, sperimentarsi imparando dall'errore.

Ogni apprendimento influenzerà la capacità di procedere oltre nella conoscenza che deve orientarsi obbligatoriamente nella direzione del corpo, dello spazio e del tempo.

Per quanto riguarda il corpo il bambino deve sperimentare e apprendere:
Capacità di adattare il movimento a spazi e tempi in maniera controllata
Conoscere la mano dominante e avere una buona coordinazione oculo manuale e fine
Sapersi orientare rispetto al suo corpo (orientamento egocentrico)
Fare esperienza e conoscere i piani e gli assi corporei
Conoscere il nome della mano che utilizza preferibilmente (lateralizzazione)
Avere una buona rappresentazione simbolica del corpo (schema corporeo cosciente)

Per ciò che riguarda lo spazio:

Sperimentare lo spazio attraverso i sensi
Riconoscere e sperimentare lo spazio topologico
Riconoscere e sperimentare lo spazio euclideo
Avere raggiunto competenze di spazio orientato
Avere capacità di rappresentazione mentale dello spazio e delle frazioni di spazio

Per ciò che riguarda il tempo:
Sperimentare e apprendere il tempo che ci avvolge
Sperimentare varietà di tempi e ritmi con il corpo
Percepire e riprodurre tempi e ritmi con il corpo
Riconoscere visivamente tempi e ritmi
Riconoscere uditivamente tempi e ritmi
Memorizzare e scrivere tempi e ritmi percepiti attraverso l'udito e la vista

Per ciò che riguarda spazio-tempo:
Sperimentare e apprendere l'incontro del tempo e dello spazio
Competenze spazio – temporali
Orientamento spaziale – prima e dopo…
Riconoscere visivamente tempi e ritmi
Memorizzare e scrivere tempi e ritmi percepiti attraverso l'udito e/o la vista

Per concludere la matematica è difficile se il bambino-ragazzo-adulto che vi si approccia non ha sviluppato tutte le competenze necessarie per poter liberamente e creativamente riflettere, cercare, scoprire, sperimentare, conoscere… altrimenti diventa accessibile.

E per dirla con David Ausubel (psicologo statunitense seguace di Jean Piaget)

"Il fattore singolarmente più importante che influenza l'apprendimento
è ciò che lo studente già conosce.
Accerta questo e insegna in accordo"

GEOMETRIA IN MOVIMENTO

Antonella CASTELLINI[1], *Alfia Lucia* FAZZINO[1], *Rosa* SANTORI[2]

[1]*I.Comprensivo 1, Poggibonsi (SI)*

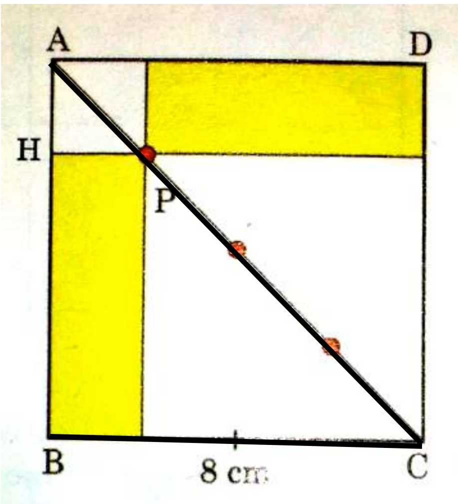
[2]*I.Comprensivo C. Angiolieri, Siena*

Riassunto

Proponiamo un laboratorio che riprende la strada tracciata da Emma Castelnuovo nel 1963 con la pubblicazione di Geometria intuitiva. Quando ancora software di geometria dinamica e Lim non erano ancora immaginabili, Emma Castelnuovo già costruiva e proponeva figure "dinamiche" (con stecchette, elastici, corde), pensate in prima persona o dagli stessi allievi. Aveva intuito la potenza della geometria dinamica per l'analisi delle variabili e delle costanti. Il laboratorio di matematica inteso"come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte " di cui parlano oggi le Indicazioni nazionali, è sempre stato il suo modo di concepire la didattica. La nostra proposta è quindi una situazione problematica presente nel testo della Castelnuovo, in adozione attualmente, rivista attraverso un modello dinamico di nostra invenzione. L'attività permette di superare la dicotomia esistente tra aritmetica e geometria coinvolgendo e mobilitando numerose conoscenze e abilità. Un cambio di prospettiva rispetto alla geometria statica per dar vita ad un apprendimento significativo.

Problema 1

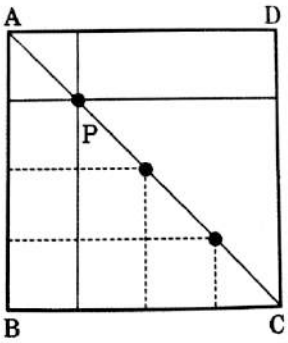
Per un punto P della diagonale AC di un quadrato ABCD si conducono le parallele ai lati della figura. Si ottengono così due rettangoli uguali.
Se il lato del quadrato è di 8 cm, si calcoli l'area di uno di questi rettangoli nei casi in cui la distanza PH del punto P dal lato AB, sia uguale a 1/4, a 1/3, a 3/4 del lato stesso.



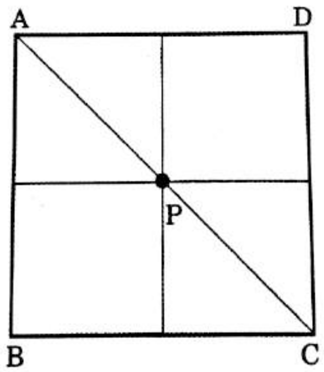
Si considerino anche i casi limite in cui P coincide con A e con C.

Varia l'area dei rettangoli al variare della posizione di P ? e come?
Spostiamo P, lungo AC, prendendo come variabile la sua distanza PH da AB.
Indicando tale distanza con x e l'area di un rettangolo con y, possiamo completare la tabella

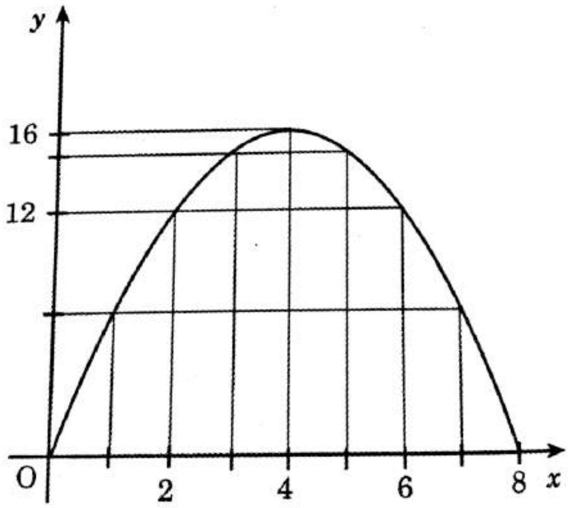
X distanza di P da AB	**Y Area del rettangolo**
0	**0**
1/4 x 8=2	**2x6=12**
1/2 x8= 4	**4 x4=16**
3/4x 8= 6	**6 x2=12**
8	**0**



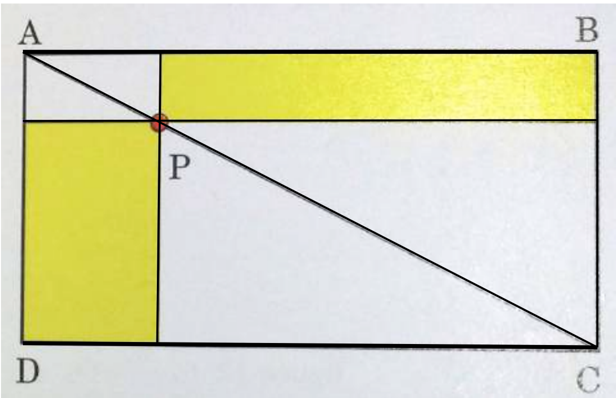
Possiamo trovare altri valori di y, dando a x valori numerici vicini.
Osserviamo che l'area del rettangolo passa dal valore zero a valori sempre più grandi fino a raggiungere il massimo quando P cade nel punto medio della diagonale (i rettangoli sono allora quadrati);

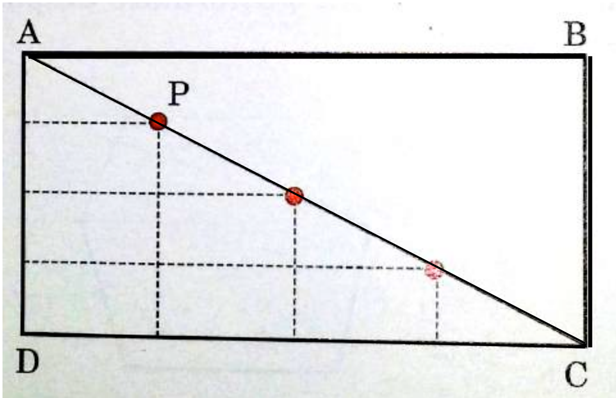


Da questo punto l'area del rettangolo diminuisce, ripassando per gli stessi valori che aveva raggiunto nella prima metà della corsa, fino ad annullarsi di nuovo, quando P coincide con C.
La curva che descrive la variazione dell'area di uno di questi rettangoli è una parabola, con la concavità rivolta verso il basso.



Problema 2
Per un punto P della diagonale AC di un rettangolo ABCD si conducono le parallele ai lati della figura. Si ottengono così due rettangoli equivalenti.





Calcolare l'area di uno di questi rettangoli nel caso in cui le dimensioni del rettangolo dato siano 8 cm e 16 cm, e P disti dal lato minore di una lunghezza uguale a 1/4, a 1/2, a 3/4 del lato maggiore.
Considerare anche i casi limite in cui P coincide con C.
L'area del rettangolo varia? Come? Quando l'area del rettangolo risulta massima?
Possiamo di nuovo costruire una tabella e il grafico come per l'esercizio precedente.

La costruzione e la relativa analisi del modello dinamico permettono di fare congetture che in un secondo tempo possono essere verificate con il calcolo, legando così più aspetti matematici in una costruzione unitaria del sapere matematico.

Bibliografia
1- **Emma Castelnuovo**,1949, Geometria intuitiva, La Nuova Italia.
2- **Guido ed Emma Castelnuovo**, Didattica della Matematica.
3- **Emma Castelnuovo**, 1963, Didattica della Matematica, La nuova Italia.

MATEMATICA INCLUSIVA IN CLASSE: IL RUOLO CHIAVE DEI PROCESSI DI INTERAZIONE

Annalisa CUSI[1]*, Isabella BOASSO*[1]*, Serena GALLIPOLI*[1]*, Ornella ROBUTTI*[1]*, Germana TRINCHERO*[2]*, Monica MATTEI*[3]*, Silvia AVANDERO*[1]

[1] *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino (TO)*

[2] *IIS "Santorre di Santarosa", Torino (TO)*

[3] *Vittoria International School, Torino (TO)*

Riassunto

Questo articolo si inquadra nell'ambito del progetto "Una matematica inclusiva in classe: metodologie e ruolo dell'insegnante", che coinvolge docenti di scuola secondaria e mira alla realizzazione di attività di tipo inclusivo nelle classi. Focus dell'articolo è l'interazione tra dinamiche sociali e dinamiche affettive nei processi di apprendimento, con particolare attenzione agli alunni in difficoltà. Proporremo un'analisi di alcuni momenti di interazione di classe che hanno visto coinvolti un'insegnante che partecipa al progetto ed i suoi studenti. Obiettivo principale dell'analisi sarà quello di mettere in luce, attraverso specifiche lenti teoriche, gli effetti dei processi di interazione in termini sia di costruzione, da parte degli allievi, della propria identità in relazione alla matematica, sia di evoluzione del proprio atteggiamento verso la matematica stessa.

Matematica inclusiva: quali metodologie?

Nel loro survey "Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice?", Scherer et al. (2016) definiscono l'educazione inclusiva come processo continuo, mirato ad offrire educazione di qualità nel rispetto delle differenze. Il progetto di formazione "Una matematica inclusiva in classe: metodologie e ruolo dell'insegnante", realizzato nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, si pone in questa prospettiva. Obiettivo del progetto e del percorso di formazione ad esso connesso è infatti quello del rinnovamento della didattica in ottica inclusiva, a partire dalla progettazione e sperimentazione in classe di attività di tipo laboratoriale (UMI-CIIM 2003) per favorire il coinvolgimento attivo di tutti gli studenti nei processi di apprendimento, andando incontro, in particolare, alle esigenze degli alunni con bisogni educativi speciali.

La ricerca ha messo in luce quali siano le principali componenti che caratterizzano approcci didattici efficaci nel supportare studenti che presentano disabilità o difficoltà in matematica, favorendo così processi di inclusione. Gersten et al. (2009), ad esempio, hanno evidenziato l'importanza di insegnare agli studenti l'uso di strategie euristiche nella risoluzione di problemi; di esplicitare passo-passo ogni nuova strategia che viene applicata; di utilizzare materiali didattici che coinvolgano rappresentazioni grafiche e visive; di servirsi di sequenze mirate di esempi; incoraggiare gli allievi a verbalizzare le proprie strategie o quelle modellizzate dall'insegnante. Gli stessi autori hanno inoltre evidenziato il ruolo chiave svolto dai *processi di valutazione formativa* come supporto per gli allievi in difficoltà in matematica, con focus particolare sui feedback che studenti ed insegnante forniscono durante tali processi.

Interazione tra processi affettivi e processi sociali: un quadro per l'analisi

Nel lavoro con studenti che presentano difficoltà nell'affrontare le attività matematiche la dimensione affettiva non può essere trascurata. La ricerca ha messo in luce come lo studio di tali

aspetti risulti essenziale, specialmente nel caso di studenti che presentino disabilità specifiche (Rodd, 2006) poiché consente di identificare possibili strategie per favorire la loro inclusione ed un loro reale accesso alla matematica.
Un aspetto chiave, nella progettazione di attività di tipo inclusivo, riguarda perciò un focus sul recupero di un eventuale atteggiamento negativo, da parte degli studenti, nei confronti della matematica. In questo lavoro ci riferiamo alla definizione di *atteggiamento verso la matematica* proposta da Zan e Di Martino (2007), che mettono in luce come i diversi profili di atteggiamento siano il risultato dell'interazione di tre componenti fondamentali: la disposizione emozionale, la visione della matematica ed il senso di auto-efficacia.

Spesso alcuni elementi della terna evolvono negativamente durante l'esperienza scolastica. Per contrastare questa tendenza appare ragionevole pensare a interventi finalizzati a superare le emozioni negative, a sradicare convinzioni poco funzionali e a modificare la visione della matematica, spezzando un circolo vizioso.

Nel nostro lavoro ci siamo serviti, come suggerito da Zan e Di Martino, del tema autobiografico per compiere una prima indagine circa l'atteggiamento nei confronti della matematica da parte degli studenti coinvolti nel progetto.

Quando si lavora in classe, le dinamiche affettive non possono essere scisse da quelle sociali: l'interazione continua tra gli studenti e tra studenti e docente influenza, positivamente e/o negativamente, l'evoluzione dell'atteggiamento verso la matematica.

Una lente teorica che si presta a studiare i processi affettivi e cognitivi connessi all'apprendimento della matematica che si realizzano durante le interazioni è il *commognitive framework* (Sfard & Prusak 2005, Heyd`Metzuyanim & Sfard 2012), che fornisce strumenti operativi per studiare non solo lo sviluppo del discorso matematico, ma anche la *creazione dell'identità nell'apprendimento matematico*. Secondo tale modello per superare la dicotomia tra processi cognitivi e dinamiche affettive è centrale il ruolo della comunicazione umana, nella quale aspetti cognitivi e affettivi interagiscono e non possono quindi essere analizzati separatamente. È evidente infatti che in una lezione di matematica il discorso può snodarsi su aspetti puramente matematici e su aspetti in cui emerge il vissuto e l'esperienza personale dello studente in matematica. Secondo il *commognitive framework* il discorso (verbale e non verbale) può essere suddiviso in due categorie: il *mathematizing*, ossia la comunicazione in cui il focus è sugli oggetti matematici e avviene attraverso l'uso di termini e segni matematici; e il *subjectifying*, una comunicazione che si focalizza su coloro che partecipano al discorso. Nell'ambito del subjectifying, viene data particolare rilevanza ai processi di *identifying diretto*, ovvero quegli interventi verbali di subjectifying caratterizzati dal fatto che si parla in maniera esplicita di una persona.

Vengono distinti *tre livelli di identifying diretto*:

- Il *1° livello* è caratterizzato da affermazioni che riguardano le azioni di uno dei partecipanti del discorso nel contesto specifico dell'attività che sta svolgendo (es. "sto provando a svolgere l'esercizio, ma non riesco");
- Il *2° livello* si riferisce ad affermazioni che riguardano l'usuale performance di uno dei partecipanti durante attività simili a quella che sta svolgendo ("Non riesco mai a svolgere questo tipo di esercizi");
- Il *3° livello* riguarda affermazioni attraverso le quali vengono attribuite caratteristiche generali ad uno dei partecipanti del discorso ("Lei è sempre brava", o "Io non capisco la matematica").

In questo articolo ci serviremo di queste lenti teoriche per analizzare un momento di discussione a piccolo gruppo e alcuni stralci della successiva discussione di classe condotte nell'ambito di un'attività del progetto. Obiettivo dell'analisi è quello di evidenziare le diverse tipologie di identifying associate agli interventi di studenti ed insegnante ed i profili di atteggiamento che emergono.

L’attività sperimentata: contenuto e metodologia

In sintonia con i risultati presentati nel primo paragrafo, il quadro teorico sulla *valutazione formativa* ha rappresentato un riferimento importante per il design dell’attività sulla quale sono focalizzate le discussioni che analizzeremo nei prossimi paragrafi. Nello specifico, ci ispiriamo alla metodologia di approccio alla valutazione formativa progettata e sperimentata da Cusi, Morselli e Sabena (2017) nell’ambito del progetto Europeo FaSMEd.

Per motivi di spazio, ci limitiamo ad elencare gli aspetti di tale metodologia che caratterizzano la progettazione dell’attività che qui presentiamo:

(a) La creazione di sequenze strutturate di schede di lavoro per le attività in classe (schede problema, schede sondaggio e schede di aiuto), con particolare focus su specifiche schede di aiuto per supportare gli studenti in difficoltà;

(b) Il lavoro a piccoli gruppi, omogenei per competenze, per favorire il supporto tra pari;

(c) La selezione di risposte degli studenti da proiettare alla LIM durante le discussioni di classe, per far scaturire un confronto ed una riflessione sulle diverse strategie attivate dagli studenti e per fornire feedback a vari livelli;

(d) La realizzazione di momenti di riflessione di tipo metacognitivo, durante le discussioni di classe, mirati all’analisi collettiva delle schede di aiuto, con l’obiettivo di favorire l’esplicitazione, da parte degli allievi, del supporto che queste schede forniscono;

(e) La riflessione ed il confronto tra studenti sulle difficoltà incontrate, sul senso delle attività svolte e su aspetti di tipo affettivo, quali le emozioni provate durante le attività.

L’attività che presentiamo è il frutto di un successivo adattamento di un quesito della prova OCSE-PISA 2000, noto come “Apples”. Agli studenti è richiesto di esplorare alcune configurazioni che rappresentano la disposizione di meli e conifere in diversi campi, a seconda del numero (n) di filari di meli (figura 1).

Code 21: All 7 entries correct

Partial credit

[These codes are for ONE error/missing in the table. Code 11 is for
n=5, and Code 12 is for ONE error for n=2 or 3 or 4]

ReleasedPISAItems_Maths.doc

Figura 1 – Le configurazioni da esplorare nel quesito PISA 2000 “Apples”

Nel quesito originale le espressioni simboliche che rappresentano le relazioni tra il numero n ed i numeri di meli e di conifere vengono fornite agli studenti. Un primo adattamento del quesito per classi di scuola secondaria di primo grado, concepito nell’ambito del progetto europeo PDTR (2006-2008) e presentato in Cusi & Malara (2013), mira a far sì che gli studenti giungano autonomamente alla generalizzazione richiesta. L’adattamento propone una sequenza di domande mirate a favorire l’esplorazione, da parte degli allievi, di configurazioni non presenti in figura 1, la verbalizzazione delle relazioni tra le variabili coinvolte, la determinazione delle rappresentazioni simboliche di tali relazioni e la costruzione di argomentazioni a supporto dei ragionamenti proposti.

Tale proposta è in linea con le ricerche di Radford (2011), che suggerisce di condurre gradualmente gli allievi alla costruzione del pensiero algebrico nell’esplorazione di successioni figurali per la ricerca di regolarità, attraverso una serie di richieste in ordine crescente di complessità e generalità: studiare una figura presente nella successione, determinare, successivamente, il numero di oggetti presenti in una figura poco lontana dall’ultima visibile, poi in una figura in posizione decisamente più lontana; studiare, infine, come determinare il numero di oggetti presenti in una figura in posizione generica.

In linea con quanto Radford (2011) suggerisce e con la metodologia introdotta da Cusi, Morselli e Sabena (2017), nell'adattamento realizzato nell'ambito del progetto "Una Matematica inclusiva in classe", abbiamo costruito tre schede di lavoro, contenenti una serie di richieste graduali mirate a supportare il processo di generalizzazione:

- disegnare la configurazione corrispondente alla posizione 5 e determinare il numero di meli e conifere presenti nella configurazione 7 (scheda 1);
- determinare il numero di meli e conifere presenti nella configurazione 40 ed esplicitare, attraverso la verbalizzazione e l'uso di una rappresentazione simbolica, la relazione tra numero della figura e numero dei meli e quella tra numero della figura e numero dei pini (scheda 2);
- esplorazione delle configurazioni con l'obiettivo di determinare, se esiste, una configurazione in cui il numero dei meli è uguale a quello delle conifere (scheda 3).

Ogni domanda posta è associata alla richiesta di produrre un'argomentazione a supporto della propria risposta.

Abbiamo progettato anche una scheda di aiuto associata alla scheda 1 e due diverse schede di aiuto associate alla scheda 2. Tali schede introducono tabelle attraverso le quali raccogliere i dati presenti in figura e focalizzano l'attenzione degli allievi sulle singole relazioni tra le variabili in gioco, favorendone l'esplicitazione. Per motivi di spazio, ci limitiamo a proporre soltanto la prima scheda di aiuto (figura 2), visto che è quella su cui lavora il gruppo di studentesse al centro dell'analisi presentata nel prossimo paragrafo.

queste due tabelle:

numero della figura	numero meli
1	1
2	
3	
4	
5	
...	

numero della figura	numero pini
1	8
2	
3	
4	
5	
...	

Osserva la tabella.

- Che relazione c'è tra numero della figura e numero di meli?

  ....

  ....

- Che relazione c'è tra numero della figura e numero di pini?

  ....

  ....

Figura 2 – La prima scheda di aiuto

Analisi di un momento di lavoro di gruppo

I seguenti stralci si riferiscono al lavoro di gruppo condotto da tre studentesse: An, Al e Gi. Si tratta di tre allieve che hanno manifestato difficoltà nei confronti della disciplina:

- An presenta un disturbo misto delle capacità scolastiche e manifesta ansia da prestazione, affrontando con grande insicurezza la disciplina. Nel suo tema definisce la matematica come un "incubo di paure e terrori".
- Al presenta un disturbo specifico delle abilità aritmetiche e difficoltà nel mantenere l'attenzione. Nel suo tema dice che la matematica la annoia e definisce la matematica come "una persona con due facce: una simpatica e l'altra diabolica".

- Gi non presenta un disturbo specifico di apprendimento, ma manifesta difficoltà nell'affrontare la disciplina. Nel suo tema mostra una visione procedurale della matematica, descrivendola come una disciplina che richiede la memorizzazione di numerose regole. Dichiara di non essere abile perché incapace di memorizzare tutto.

Le tre allieve, dopo aver provato ad affrontare la prima scheda di lavoro autonomamente, ricevono la scheda di aiuto dall'osservatrice. Il gruppo si mostra immediatamente in difficoltà nel cogliere il senso dell'aiuto ricevuto: non provano a compilare la tabella come suggerito e cercano, senza apparenti strategie possibili relazioni tra le variabili in gioco. An prova a lavorare da sola. Al e Gi, inizialmente, concordano circa la possibilità che il numero dei meli in una figura si possa ottenere raddoppiando quello nella figura precedente, poi Gi nota che questa osservazione non è corretta.

32. An: Io non ci sto capendo niente..
33. Osservatrice: An tu a che punto sei?
34. An: Io al punto iniziale.. sto malissimo..
35. An: No vabbè io non ce la faccio.. mi sono arresa..
36. Osservatrice: Dai, qual è il problema?
37. An: Sto facendo dei calcoli..
38. Osservatrice: Perché? Spiegami i calcoli che stai facendo..
39. An: Non lo so…sto provando a fare dei calcoli ma non viene nessun risultato.

In questo primo stralcio di discussione, An, dopo una fase di lavoro individuale, manifesta emozioni negative (righe 32-34-36), nonostante paia non essersi arresa di fronte alle difficoltà. Si tratta di un identifying di livello 1, caratterizzato da un contrasto tra parole ("non ci sto capendo niente", "mi sono arresa") ed azioni (continua a cercare una risposta). Di fronte a questi interventi, l'osservatrice cerca di supportare An, aiutandola ad esplicitare le ragioni delle sue difficoltà e la strategia che sta attivando. Nel risponderle, An (righe 38-40) dichiara il fallimento dell'unica strategia alla quale ha pensato, ovvero quella di effettuare calcoli casuali. In questo modo, esplicita una visione della matematica come calcolo e disciplina per lei difficilmente controllabile.

Le tre studentesse provano a chiedere aiuto a compagni di altri gruppi. L'osservatrice dice loro che devono cercare di supportarsi a vicenda, senza interagire con altri gruppi. A questo punto, Gi interviene chiedendo chiarimenti circa la motivazioni alla base della scelta di come comporre i gruppi di lavoro.

45. Gi: Sembra che lo avete fatto apposta, una più (…) dell'altra..
46. Osservatrice: No, io non ho fatto niente.. eh?
47. Gi: Infatti ci dovrebbe conoscere *(riferendosi all'insegnante)* tre persone, una peggio dell'altra,
48. Osservatrice: Magari vi potete aiutare di più? Se c'è uno più bravo.. non lo so.. io non vo conosco..
49. Gi: siamo una peggio dell'altra, cioè quattro e mezzo tutte e tre, cioè non c'è via di mezzo…

Gi critica la scelta dell'insegnante di far lavorare lei e le due compagne assieme (riga 45). Attraverso queste riflessioni sulla scelta metodologica di far lavorare insieme studenti allo stesso "livello" di competenze, Gi esplicita la percezione che ha di sé e delle compagne. Si tratta di un identifying di livello 2 perché, anziché riferirsi all'attività, Gi parla in termini generali delle competenze del gruppo in ambito matematico. Quando Gi arriva a definire il gruppo "tre persone, una peggio dell'altra" (riga 47) l'identifying diventa di livello 3, poiché la visione circa la propria capacità di fare matematica diventa quasi, in questo discorso, una percezione negativa delle tre studentesse in quanto persone.

Un altro aspetto rilevante in questo breve stralcio è l'interpretazione che Gi fa del voto come mezzo per identificare se stessi come individui. Anziché valutazione della performance, il voto numerico ("quattro e mezzo tutte e tre") è per Gi valutazione della persona: Gi non distingue tra valore della performance e della persona come individuo che affronta un'attività matematica. Gi accusa l'insegnante e il gruppo di ricerca per aver composto, ingiustamente, il loro gruppo. Questi interventi manifestano un risentimento, che influenzerà l'atteggiamento delle tre studentesse (Al e

Gi in particolare): da questo momento in poi, le tre studentesse si metteranno sulla difensiva, concentrandosi sulla loro emotività e affrontando in maniera poco seria l'attività.

An continua a lavorare da sola, ma le sue difficoltà nella memorizzazione di fatti numerici (senza calcolatrice non è, ad esempio, in grado di riconoscere che 9 non è il doppio di 4) le impediscono di determinare la corretta relazione tra le variabili. L'osservatrice suggerisce alle tre studentesse di provare a ragionare assieme, sottolineando che quella che devono cercare è una strategia condivisa e non necessariamente un risultato corretto. A un certo punto, Al dichiara di aver risolto il problema.

54. Al: io ho risolto!
55. Osservatrice: ma siete sicure?
56. Al: io si! Sicurissima!
57. Osservatrice: dovete consegnare una scheda di gruppo, siete tutte d'accordo?
58. Al: non da il voto per fortuna, perché altrimenti avrei preso 2!
59. Osservatrice *(indicando le tabelle nella scheda)*: C'è 1, 4, 9, 16: questo è il doppio di questo? 9 è il doppio di 4?
60. Gi: No, non è vero..
61. Al: Oh ma che dite!! Ah tesoro, guarda qua..
62. Osservatrice: però voi avete fatto il doppio
63. Al: Facciamo così.. per me è giusto, io lo consegno, poi vedete.
64. Osservatrice: Voi pensateci.
65. An: sono i …non mi viene, no i multipli, i…
66. Osservatrice: Quello che pensi scrivilo.
67. Gi: Cioè ma vi rendete conto il mio disegno? Cioè vi sembra normale?

Al ostenta un'estrema sicurezza circa la correttezza della soluzione da lei determinata (righe 54, 56, 64). Questi suoi interventi possono essere catalogati come identifying di livello 1, poiché, in realtà, Al manifesta, in maniera implicita una estrema insicurezza. Questa insicurezza diventa evidente quando la studentessa riflette sul fatto che, in caso di valutazione dell'attività, il suo risultato sarebbe gravemente insufficiente (riga 58). La fretta che Al mostra nel consegnare senza riflettere è interpretabile come forma di rifiuto: sembra che il suo intento non sia quello di risolvere correttamente l'attività, ma di completarla il prima possibile per porre fine al suo disagio. An è l'unica che cerca di seguire i consigli dell'osservatrice, focalizzando l'attenzione sul piano matematico, ma le sue estreme difficoltà la bloccano (riga 65). Da osservare come Gi, nuovamente, proponga un intervento che la identifica come non capace di affrontare l'attività (linea 67). Il suo intervento, con focus esplicito sul disegno effettuato, può essere interpretato come critica implicita, attraverso l'ironia ("vi sembra normale?"), al proprio modo di affrontare le attività matematiche (in questo senso diventa un identifying di livello 2).

Analisi di alcuni stralci della discussione di classe sull'attività

I seguenti stralci si riferiscono alla discussione di classe condotta dalla docente con l'obiettivo di favorire il confronto tra strategie e identificare un approccio condiviso alla risoluzione dei quesiti. Concentreremo qui la nostra attenzione sugli interventi che l'insegnante fa per supportare la costruzione di una identità "positiva" da parte degli allievi più in difficoltà e per stimolare la classe a riflettere sulle difficoltà incontrate e sul senso dell'attività affrontata.

Dopo un primo confronto sulle risposte dei vari gruppi alle prime schede di lavoro, la classe concorda che il numero dei meli può essere determinato come quadrato del numero della figura corrispondente e che il numero dei pini è pari al prodotto tra 8 ed il numero della figura stessa. Gli studenti condividono, inoltre, la rappresentazione simbolica di tali relazioni. Durante la discussione, l'insegnante, guidata dagli studenti, scrive alla lavagna le due espressioni n·8 e n2. A questo punto, l'insegnante cerca di coinvolgere anche An nella discussione.

8. Insegnante: nx8 cosa ci da?
9. Coro: I pini
10. Insegnante: An, che ne pensi? Sei d'accordo?

An annuisce

11. Insegnante: E n^2 cosa mi da, An?
12. An: Le mele
13. Insegnante: Benissimo

In questo breve stralcio, l'insegnante cerca di coinvolgere An per valorizzarla, essendo consapevole sia della bassa stima che la studentessa ha circa le proprie capacità nell'affrontare la matematica, che del fatto che durante il lavoro a gruppi An ha lavorato spesso in isolamento ed è stata talvolta sbeffeggiata dalle compagne. Gli interventi dell'insegnante rappresentano un identifying di livello 1 poiché, di fronte agli altri studenti, An viene identificata come un interlocutore in grado di valutare quanto detto dagli altri (riga 10) e di rispondere correttamente (riga 13).

22. Insegnante: Domanda: qualche gruppo ha avuto la scheda di aiuto. Qualcuno non osava chiederla. Innanzitutto perché qualcuno non osava chiederla? Vi ha aiutato la scheda?
23. S6: Sì.
24. S7: Più o meno.
25. Insegnante: Cominciamo da lei che ha detto "è stato un aiuto", poi sentiamo te che dici "più o meno". Perché è stato un aiuto? In che cosa ti ha aiutato?
26. S6: Ci ha aiutato a capire qual è il passaggio che dovevamo fare…
27. S7: C'era una tabella, che più o meno ci aiutava perché …
28. S8: Spiegava il ragionamento.
29. S7: Però, noi che abbiamo visto la scheda di L, potevamo benissimo arrivarci anche senza scheda (di aiuto).
30. S9: Infatti, in realtà ci siamo arrivati senza scheda. Con la scheda abbiamo avuto la conferma.
31. G: C'è qualcuno per cui la scheda è stata un aiuto perché prima non ci sareste riusciti o no?
32. S3: Il nostro gruppo ha avuto molto aiuto dalla scheda.
33. G: Qual è la parte che vi è servita?
34. S5: Ci ha aiutato molto che dicesse di moltiplicare per 8 perché è quello che ci ha fatto capire che i pini potevano anche essere in minoranza rispetto ai meli.

In questo stralcio di discussione l'insegnante attiva una strategia tipica della metodologia di lavoro ispirata al progetto FaSMEd, poiché pone la discussione ad un livello meta, focalizzando l'attenzione sulle schede di aiuto (riga 22). I termini "aiutare" e "servire", introdotti dall'insegnante rappresentano segni importanti attorno a cui si snoda la discussione.

Gli allievi mostrano di aver colto l'obiettivo della richiesta della docente e cercano di esplicitare, non senza difficoltà, quali siano i processi che la scheda di aiuto supporta (righe 26, 28) ed il ruolo della tabella come strumento a supporto di tali processi (riga 27).

Alcuni studenti (S7 ed S9) dichiarano di non aver avuto bisogno dell'aiuto perché hanno lavorato in gruppo con L, lo studente certificato, al quale era stata fornita una scheda semplificata (riga 29). Il loro intervento, oltre ad evidenziare una mancanza di consapevolezza in riferimento al concetto di "aiuto", visto che la scheda di L, di fatto, ha rappresentato un aiuto per il suo gruppo, può essere catalogato come identifying di primo livello poiché è evidente la necessità di S7 ed S9 di sottolineare, di fronte ai compagni, di essere stati in grado di affrontare l'attività senza necessità di alcun supporto.

S3 ed S5, al contrario, ammettono che la scheda di aiuto ha rappresentato un supporto importante per loro (righe 32 e 34). S5, in particolare, mostra abilità di tipo metacognitivo nell'identificare con precisione quale osservazione l'uso della scheda le ha consentito di fare.

L'insegnante interpella Al, chiedendole se anche per il suo gruppo è stato utile l'aiuto. Al dice di sì. La classe reagisce con una risata.

45. Insegnante: Quando si parla in gruppo, ci vuole rispetto degli altri. Quando qualcuno parla, stiamo in silenzio ad ascoltare. Non è il caso di ridere perché qualcuno può dire qualcosa che può servirci. Oppure può essere in difficoltà a parlare in pubblico. Bisogna darsi una mano a vicenda. … Cosa mi stavi dicendo? (*rivolgendosi ad Al*)
46. Al: Sì, sì! E' servito. La scheda l'abbiamo usata e ci è servita.
47. Insegnante: Mi è sembrato che, qualche volta, nel gruppo, non eravate d'accordo sulla scheda. O no?
48. Al: Non è che non eravamo d'accordo. E' che loro capivano e io no.

Tutti ridono.

49. Insegnante: Questo complicava le cose. Ma poi hai capito o no?
50. Al: Sì, alla fine sì, ma all'inizio ….
51. Insegnante: Ognuno ha i propri tempi, no?
52. Al: Sì.

In questo altro breve stralcio, l'insegnante cerca di coinvolgere nella discussione Al, con l'obiettivo di farla riflettere sul supporto fornito dalla scheda di aiuto. L'insegnante, avendo osservato i diversi gruppi durante il precedente momento di lavoro, sa che Al si è spesso posta in atteggiamento di rifiuto, manifestando una ostentata sicurezza, segno di una notevole insicurezza (si veda la precedente aanalisi del lavoro di gruppo).

E' necessario innanzitutto sottolineare l'importanza del primo intervento dell'insegnante (riga 45): si tratta di un momento chiave della discussione, mirato a chiarire il ruolo fondamentale svolto dal rispetto reciproco. Attraverso questo intervento, l'insegnante ribadisce quali siano le regole fondamentali per un confronto efficace durante le discussioni di classe. Il suo principale obiettivo è quello di supportare l'attivazione di processi positivi di identifying durante l'interazione di classe.

Di fronte all'iniziale risposta di Al, che dichiara di aver utilizzato la scheda di aiuto e di averne colto il supporto (riga 46), l'insegnante interviene con l'obiettivo di far riflettere la studentessa sul proprio ruolo durante l'attività a gruppi (riga 47). L'intervento successivo di Al (riga 48) rappresenta un identifying di livello 1 da parte dell'allieva. Interessante è il contrasto tra quanto Al dice durante l'attività (dichiarando di essere sicura di aver svolto correttamente la consegna, ostentando estrema sicurezza) e quanto dice durante la discussione. La dichiarazione di Al ("loro capivano e io no") ci consente di rafforzare l'ipotesi fatta circa la reale insicurezza dell'allieva, che si manifesta, da un lato, durante l'attività a gruppi, attraverso la smania di consegnare il proprio elaborato ostentando sicurezza, e, dall'altro, durante la discussione, attraverso una esplicita dichiarazione di un senso di inferiorità nei confronti delle compagne.

Il successivo intervento dell'insegnante (riga 51) rappresenta un feedback importante sia per Al che per l'intera classe, poiché sottolinea il fatto che i diversi tempi individuali sono un aspetto normale nell'interazione di classe, introducendo in questo modo una nuova regola per un confronto efficace: il rispetto dei tempi individuali.

53. Insegnante: Domande su questa attività? Qualcosa da aggiungere?
54. S3: Ne faremo altre?
55. Insegnante: Perché no? Vi piacerebbe farne altre?
56. Coro: Sì.
57. S7: Anche perché sono delle lezioni diverse dal solito.
58. S9: Anche perché io prima non ci riuscivo a capire queste cose. Qua è già logica, un po'. Prima non ci riuscivo, invece quando mi è arrivata la scheda, ho capito. L'anno scorso io e la logica eravamo da tutt'altra parte….però ci sono riuscita!!! E sono felice! Quindi per me, se ci riesco, lo possiamo fare.

Nell'ultimo stralcio che proponiamo la classe riflette sul senso dell'attività svolta, manifestando un interesse a proseguire questa tipologia di lavoro. Una studentessa, in particolare, sente l'esigenza di condividere con i compagni l'esperienza vissuta (riga 58) come ri-costruzione di una "migliore" identità: l'attività le ha consentito di percepirsi diversamente nel suo rapporto con la matematica. Si tratta dunque di un intervento che permette di valorizzare l'attività e la metodologia adottata come strumenti a supporto dei processi inclusivi.

Conclusioni

Le analisi che abbiamo condotto ci hanno permesso di mettere in evidenza la complessità delle dinamiche di identifying che si realizzano durante le interazioni in classe e come queste influenzino l'evoluzione dell'atteggiamento verso la matematica negli allievi.

Aver analizzato la discussione a piccolo gruppo ci ha permesso di far emergere fenomeni di identifying che conducono allo sviluppo di un atteggiamento "negativo" nei confronti della matematica, esemplificabile attraverso la frase di Gi: "siamo una peggio dell'altra, cioè quattro e mezzo tutte e tre, cioè non c'è via di mezzo…", caratterizzata dall'identificazione dell'individuo con il voto che riceve.

E' fondamentale che tali fenomeni siano indagati dai docenti e che le discussioni di classe siano progettate con l'obiettivo di far riflettere gli studenti sul proprio atteggiamento nei confronti della matematica, in modo da far emergere la costruzione, da parte loro, della propria identità nel rapporto con la disciplina. Come evidenzia l'esempio mostrato, durante le discussioni di classe il docente può intervenire in modo da smussare eventuali elementi di conflitto osservati durante le fasi di lavoro a gruppi e da valorizzare le peculiarità degli allievi, incoraggiando coloro che mostrano una bassa autostima in modo che si possa realizzare un processo collettivo di ri-costruzione delle identità individuali.

Riferimenti bibliografici

CUSI, A., & MALARA, N.A. (2013). A theoretical construct to analyze the teacher's role during introductory activities to algebraic modelling. In B. Ubuz et al. (eds.), *Proceedings of Cerme 8* (pp. 3015-3024).

CUSI, A., MORSELLI, F., & SABENA, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, Vol. 49(5), 755–767.

GERSTEN, R., CHARD, D.J., JAYANTHI, M., BAKER, S.K., MORPHY, P., FLOJO, J. (2009). Mathematics Instruction for Students With Learning Disabilities: A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242.

HEYD-METZUYANIM, E., & SFARD, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 51–52, 128–145.

UMI-CIIM (2003). *Matematica 2003, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. Lucca: Liceo Vallisneri.

RADFORD L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In J. Cai & E. Knuth (eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Springer.

RODD, M. (2006). Commentary: Mathematics, emotion and special needs. Special Issue "Affect in Mathematics Education". *Educational Studies in Mathematics*, 63, 227–234.

SCHERER, P., BESWICK, K., DEBLOIS, L., HEALY, L., & MOSER OPITZ, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice? *ZDM Mathematics Education*, 48, 633–649.

SFARD, A., & PRUSAK, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14-22.

ZAN, R. E DI MARTINO, P. (2007). Attitude toward mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast* (Monograph 3, pp.157-168). The Montana Council of Teachers of Mathematics.

I COMPORTAMENTI PROBLEMA

Simonetta NUCCIOTTI
Scuola primaria

ABSTRACT

Il laboratorio intende presentare una modalità di osservazione sui "comportamenti problema" che tenga conto delle caratteristiche individuali relative alle capacità di relazione di ciascun individuo. Tali capacità trovano origine nel percorso di crescita ed evoluzione umana, come in quello di ogni altro essere vivente, secondo i principali bisogni biologici legati alla sopravvivenza ed alla conservazione della specie. L'ineluttabile valenza di tali bisogni, condiziona comportamenti ed atteggiamenti di ciascuno, fino a determinarne le caratteristiche imprescindibili nelle modalità di relazione e potenzialità di apprendimento.

QUALE *BISOGNO* NEL BISOGNO DI IMPARARE?

Nella pratica professionale, relativa alla didattica frontale, in particolar modo nelle attività educative e formative specifiche per i BES, si possono riscontrare alcune difficoltà nell'applicazione di protocolli di intervento proposti e suggeriti dalla letteratura dedicata: non sempre è possibile rispettare fedelmente indicazioni operative particolari, a causa dei vari e diversi contesti ambientali che caratterizzano la scuola e ne rappresentano contestualmente limiti e risorse.
L'opportunità del dover far "convivere" gli interventi specifici, individualizzati o collettivi, con le attività curricolari programmate dal team didattico, vanifica spesso la volontà di procedere secondo criteri e modalità ritenute efficaci da esperti del settore: succede che le situazioni ambientali, articolate e varie, comportino limiti difficilmente superabili, come *reale* coerenza e condivisione dell'azione educativa da parte del corpo docente, spesso dovuta per i continui avvicendamenti di figure professionali.
Inoltre, ci troviamo spesso a constatare, che tra osservazione, attività strutturate sperimentali, verifiche, relazioni per la condivisione esplicativa di percorsi didattici proposti, varie interpretazioni degli obiettivi raggiunti, si possa disperdere l'energia necessaria per un funzionale approccio relazionale, forse meno tecnico , ma più umano.
Fondamentale per questo, dover cercare e riconoscere elementi di improbabile catalogazione, tenendo in considerazione la meravigliosa unicità che contraddistingue la preziosa utenza, che possano permettere di ottimizzare tempi e modi di intervento nelle attività di relazione, e la cui efficacia possa essere verificata nel breve, medio e lungo periodo.
Occorre un " Nuovo Strumento do Osservazione" che possa permettere di uniformare interventi e modalità, nel totale rispetto delle peculiarità umane individuali degli alunni, e porre tale *condizione* alla base di ogni modalità di relazione con gli stessi, oltre che nella pratica educativa e formativa scolastica.
Nella prospettiva di questa ricerca, l'osservazione dei *comportamenti*, si è focalizzata sulla reazione mimica e fisica dell'individuo, in risposta agli stimoli esterni, sia nelle relazioni interpersonali, che nell'esposizione ai vari ambienti di vita e condivisione. In quest'ottica, è
possibile osservare un *comportamento* specifico, in risposta ai vari stimoli, che sembra condurre l'individuo verso uno *status* percepito come *migliore*, per se stesso, o più semplicemente appagante o funzionale per le proprie necessità.
Diviene quindi necessario comprendere quali *bisogni* possano trovarsi alla base di un comportamento o funzionamento individuale, perché solo così sarà possibile utilizzarli come

strumenti in grado di guidare o far parte integrante di una efficace progettualità negli interventi educativi e formativi, individuali e collettivi.
Il percorso di riflessione, ha condotto fino alla constatazione che ogni modalità di relazione, viene *dominata* da bisogni riconoscibili all'interno degli *ISTINTI PRIMORDIALI*, legati alla sopravvivenza ed alla conservazione della specie, la cui presenza e forza riconducono in maniera preponderante al *senso vitale ed evolutivo* di ogni azione, in ogni essere, in ogni tempo e in ogni luogo conosciuti.
Tale condizione, umana, ma non solo, necessita di capacità di adattamento ai vari Contesti Ambientali, che dovranno rispondere alle richieste individuali relative al bisogno di Nutrimento, al bisogno di Appartenenza, al bisogno Protezione, alla definizione di un proprio Territorio; termini intesi in ogni accezione di significato, come parti integranti della storia evolutiva di ogni essere vivente.
Non si tratta di una *Scoperta*, ma semplicemente di una Riscoperta e Rivalutazione di quanto naturalmente presente in ogni forma di vita: ogni Essere individua istintivamente le risorse o le carenze ambientali, relative ai propri bisogni, che dovrà in qualche modo riconoscere e sopperire; in funzione di questo obiettivo terrà in allerta ogni senso/canale comunicativo con l'esterno. Per questo scopo, ciascuno dei cinque sensi, si attiva in uno specifico compito, e determina il *Funzionamento* individuale, in risposta al bisogno di soddisfacimento di *condizioni* ritenute istintivamente come vitali.
Nel momento in cui c'è *appagamento*, sarà possibile veicolare azioni e pensieri verso processi evolutivi e conoscitivi ulteriori, (*relazione efficace ed apprendimento*), oppure utilizzare la ricerca di appagamento dei bisogni come modalità operativa nella proposta di attività didattico-formative.
Condizione necessaria, in ogni caso, è proporsi con modalità di relazione opportune ed efficaci: in assenza di autorevolezza, i *meccanismi istintivi di protezione*, potrebbero inficiare la corretta finalità di ogni proposta educativa.(se acquisisco esperienze in condizioni di *paura o sentiti di pericolo,* ogni elemento appreso verrà accompagnato da una sensazione negativa e quindi probabilmente utilizzato con difficoltà)

L'APPRENDIMENTO *FUNZIONA* SE CORRETTAMENTE MOTIVATO

La Motivazione rimane condizione necessaria per una corretta funzione di ogni forma di apprendimento. Ciò che rende efficace ed efficiente un percorso di formazione personale, necessita essenzialmente di adeguati substrati emotivi, recettivi ed attivi sulle modalità di relazione che introducono i vari insegnamenti; ogni proposta di attività, può venire *accolta* se denota caratteristiche e modalità che in vario modo supportano l'individuo nel perseguimento della ricerca di equilibri personali, riferiti ai bisogni primordiali per la prpria sopravvivenza.
Si va a scuola inizialmente per compiacere i genitori, (protezione) perché è una regola sociale, (appartenenza), si accetta e persegue per affermare la propria personalità,
(territorio), si continua a ricercare la conoscenza da adulti, auspicabilmente, per supportare lavoro e responsabilità, (nutrimento)…. In sintesi, ogni azione educativa, per essere determinante, formativa ed efficace, necessita di una Motivazione personale all'accettazione della proposta o alla richiesta di *informazioni e di elementi necessari* alla sopravvivenza dell'individuo; deve poter perseguire in qualche modo i bisogni primordiali, insiti in ogni essere conosciuto, dalla sua comparsa sul nostro Pianeta, in riferimento a Sopravvivenza e Conservazione della specie.

Laboratorio

LA *FUNZIONE* DEL COMPORTAMENTO-PROBLEMA

Negli ambienti di istruzione, i comportamenti degli alunni, denotano caratteristiche peculiari, conseguenza di vissuti e *sentiti* personali maturati soprattutto all'interno di contesti familiari con

proprie caratteristiche legate a tradizioni storico-geografiche e culturali.. Comprendere queste caratteristiche è fondamentale per attivare inizialmente modalità compatibili con le stesse, ed educare, quanto possibile, al riconoscimento ed all'accettazione delle proprie unicità, affinché ciascuno possa entrare a far parte del tessuto sociale con il proprio prezioso potenziale umano, nella realizzazione e tenuta degli equilibri fondamentali al vivere civile.
Può accadere, che abitudini comportamentali maturate in ambienti ritenuti autorevoli, si inseriscano con iniziale difficoltà in nuove situazioni e condizioni di relazione, ed il relativo disagio può promuovere vari tipi di conflittualità.
I "Comportamenti Problema" rientrano in maniera preponderante all'interno di questo tipo di osservazione: gli individui che manifestano maggiori difficoltà negli inserimenti o nella migliore gestione delle relazioni interpersonali, evidenziano un *funzionamento* che necessita di particolare osservazione, attenzione e cura.

Un'importante nota redatta dall'Organizzazione Mondiale della Sanità ed ufficializzata il 22 maggio 2001, determina uno Strumento di Classificazione innovativo, multidisciplinare e dall'approccio universale, denominato ICF: Classificazione Internazionale del Funzionamento della Disabilità e della Salute.
L'ICF si delinea come una classificazione che vuole descrivere lo stato di salute delle persone in relazione ai loro ambiti esistenziali (sociale, familiare, lavorativo) al fine di cogliere le difficoltà che nel contesto socio-culturale di riferimento possono causare disabilità. Tramite l'ICF si vuole quindi descrivere non le persone, ma le loro situazioni di vita quotidiana in relazione al loro contesto ambientale e considerare l'individuo non solo come persona avente malattie o disabilità, ma soprattutto evidenziarne l'unicità e la globalità:
- ciascun individuo attiva capacità personali, in risposta a situazioni ambientali diverse da quelle che lo hanno visto maturare proprie dinamiche di relazione
- l'ambiente determina la *diversità* in rapporto alle regole sociali contestuali
- la gran parte dei comportamenti-problema comunica la ricerca di soddisfacimento di un bisogno
- ogni comportamento persegue finalità *funzionali* al soggetto

Tutti i bambini possono presentare, in determinate situazioni, alcuni comportamenti definibili come problematici, in relazione a

- 1-inattenzione - disattenzione
- 2- iperattività
- 3-impulsività
- 4- atteggiamenti oppositivi

Se tali comportamenti sono riscontrabili in almeno 2 contesti ambientali, normalmente vissuti dal bambino, come casa, scuola, ambienti di gioco, e nella gran parte delle situazioni quotidiane, si può affermare che siano causati da difficoltà oggettive dell'autocontrollo e della capacità di pianificazione.
L'opportuna osservazione, che potrà condurre all'individuazione di comportamenti realmente problematici, dovrebbe essere supportata da ulteriori strumenti e valutazioni, come ad esempio:
- utilizzo di Check List che aiutino a riconoscere segni e sintomi derivanti da disordini sensoriali;
- utilizzo di opportune griglie di raccolta dati, per una valutazione quanto più possibile obiettiva della funzione soggettiva dei *comportamenti ritenuti problematici*.
- considerare che spesso i bambini, soprattutto i più piccoli, non sanno esprimere disagi fisico-dolorosi dovuti a patologie o stati infiammatori acuti o cronici e questo condiziona enormemente i comportamenti.

L'esperienza personale maturata utilizzando questi strumenti di osservazione, ha supportato con forza le seguenti considerazioni:

- ogni individuo, inserito in un nuovo ambiente, attiva comportamenti funzionali all'appagamento di necessità personali, riferibili ai *bisogni primordiali* di Sopravvivenza e Conservazione, ma in relazione a *sentiti* soggettivi.
- ad ogni variazione di *status ambientale*, la necessità di adattamento, subordinata da nuove regole sociali contestuali, pone l'individuo a confronto con le proprie capacità/potenzialità e maturità acquisite precedentemente in altri ambiti relazionali.

Di conseguenza, ogni ambiente vissuto, in primis quello educativo e formativo, dovrebbe far percepire a ciascun individuo, la possibilità di appagamento dei propri bisogni vitali, ossia la definizione e riconoscimento di uno specifico *territorio,* la garanzia di risorse opportune al necessario *nutrimento*, poter cogliere condizioni di *protezione* da situazioni ritenute pericolose per la propria incolumità, acquisire netta percezione di rassicurante e contenitiva *appartenenza* ad un gruppo o ambiente che denoti compatibilità con le proprie caratteristiche umane.

In una prima fase, gli interventi specifici o collettivi, dovrebbero agevolare tali percezioni, partendo dall'unicità e globalità di ciascuno, cercando di individuare gli strumenti più consoni al raggiungimento degli obiettivi formativi curricolari e specifici.
In seguito, sarà possibile anche utilizzare i «punti deboli» individuati, per rinforzare e motivare ulteriormente il percorso educativo.

Infine, per una corretta gestione dei presupposti, è sempre opportuna l'attivazione di una ***relazione efficace****, in quanto è condizione necessaria per ogni intervento psico-educativo, è insostituibile nelle procedure* ***proattive****, positive-sostitutive, e non si può prescinderne nelle procedure, a volte necessarie, positive-punitive.*

ANALIZZANDO ALCUNE SITUAZIONI EMBLEMATICHE

Figura 1: Rifiuto di ogni offerta proveniente dall'ambiente

Figura 2: E' tutto mio e me lo prendo!

Figura 3: Appropriarsi di cose altrui

BISOGNO EMERGENTE: *NUTRIMENTO*

TUTTO CIO' CHE CONCORRE AL FABBISOGNO ENERGETICO E STRUTTURALE DELL'INDIVIDUO

(**Es. Fig 1**)***RIFIUTO DI OGNI OFFERTA PROVENIENTE DALL'AMBIENTE*** Il riferimento non si esaurisce con il cibo: l'individuo che rifiuta qualunque tipo di offerta e si oppone al relativo ingresso nei propri confini vitali, può comunicare un rifiuto per l'ambiente in generale, dal quale l'offerta proviene, per potersene dissociare. Tale situazione, potrebbe indicare la personale tendenza al controllo ed alla mancanza di fiducia verso l'altro, fin quando non si concretizzino certezze personali di affidabilità ambientale e relazionale. Gli interventi dovrebbero concentrarsi sulla conduzione di dinamiche prive di forzature e che dimostrino accoglienza, tranquillità e serenità, fra tutte le figure del contesto ambientale.

(Es. Fig.2)*__VOLERSI APPROPRIARE DI OGNI ELEMENTO AMBIENTALE__* Può capitare di osservare la tendenza a volersi appropriare di ogni aspetto caratterizzante un ambiente, un bisogno dirompente di dover introdurre nella propria sfera personale ogni elemento, edibile, materiale o relazionale. Il sentito soggettivo è di mancanza nei confronti di elementi percepiti come vitali, e può interessare il cibo, ma anche giochi, o presenza di figure autorevoli. L'individuo prende coscienza che altri, nello stesso ambiente hanno le sue stesse necessità, ma la disponibilità delle risorse non viene percepita come costante o certa nel tempo. Stesso aspetto può manifestarsi con chi ha una percezione di se stesso riduttiva, non soltanto fisica. In questi casi è stato riscontrato che negare o nascondere o privare, non estingue il comportamento, mentre guidare le percezioni di se stessi verso elementi di Grandezza e di Unicità personale, può soddisfare il bisogno ricercato e agevolare una relazione costruttiva.

(Es: Fig.3)*__APPROPRIARSI DI COSE ALTRUI__* Si è rilevato che la tendenza ad appropriarsi di cose altrui , può interessare chi manifesta un *sentito* legato al bisogno di nutrimento insoddisfatto: l'individuo si propone con un grande controllo su se stesso, con comportamenti fin troppo puntigliosi, ma affatto compresi o accettati nella funzione educativa . Il bisogno di appropriarsi, *nutrirs*i, di cose altrui, sembra essere guidato dalla necessità di potersi sentire parte di altri, che invece manifestino completezza e sicurezza. E' un aspetto che si può rivelare in individui "sovrastimati" , ma che soffrono perché non si sentono meritevoli di questo giudizio. Credono di non poter chiedere nulla, proprio perché considerati molto bravi e capaci. L'intervento educativo dovrebbe poter rispondere al loro grande bisogno di ricevere, quindi nutrirsi, comprendendo che è giusto e possibile chiedere per ottenere, senza elemosinare attenzioni, premure, complicità.

Figura 4:Atteggiamenti oppositivi e provocatori

Figura 5: Dinamiche di relazione tendenzialmente violente

Figura 6: Il leader sono io!

BISOGNO EMERGENTE: *__TERRITORIO__*
DEFINIRE CONFINI E AREE IN CUI E' POSSIBILE ESERCITARE POTERE PERSONALE ASSOLUTO- AFFERMAZIONE E COSCIENZA DI SE STESSI

(Es: Fig. 4)*__ATTEGGIAMENTI OPPOSITIVI E PROVOCATORI__* Gli atteggiamenti oppositivi e/o provocatori, dichiarano una tensione nel *sentito* territoriale, il bisogno di investire energie sul riconoscimento della propria superiorità o autonomia. Si rilevano comportamenti che esprimono il bisogno della provocazione come unico modo per avere la certezza di essere percepiti . Tale aspetto si può verificare anche se le figure di riferimento pongono l'attenzione sull'individuo, solo per contrastare o correggere comportamenti non adeguati, mentre ignorano quelli positivi. L'intervento educativo potrebbe individuare i rinforzi negativi che hanno contribuito ad alimentare questi comportamenti, rimuoverli e promuovere nuove dinamiche di relazione che pongano attenzione e gratificazione soprattutto sugli atteggiamenti corretti.

(Es:Fig.5)*FREQUENTE MANIFESTAZIONE DI ATTEGGIAMENTI DI RELAZIONE ETEROAGGRESSIVI*I comportamenti etero aggressivi, sia verbali che fisici, verso chiunque acceda nello spazio percepito come *esclusivamente proprio,* evidenziano il bisogno di investire le risorse nella difesa estrema di ciò che appartiene all'individuo e viene ritenuto vitale. Nel vissuto specifico, è frequente rilevare *sentiti* o esperienze di sottrazione di elementi personali, in modalità poco adeguate, anche aggressive o violente, o non comprese. Di conseguenza si pensa di scongiurare un nuovo attacco-conflitto attaccando per primi. L'intervento educativo potrebbe essere anche punitivo, ma solo nell'immediato, e possibilmente riferito all'erroneo bisogno di difesa ad oltranza del proprio *territorio. Potrebbe essere opportuno anche attivare* interventi di educazione alla condivisione, dove si alimenti la certezza che *l'altro* non sia necessariamente sinonimo di privazione, e/o attacco alle proprie cose, ma possibile elemento di arricchimento personale.
(Es: Fig.6)*COMPORTAMENTI CHE TENDONO AD AVERE IL COMANDO E CONTROLLO SU CHIUNQUE* In questo caso si rilevano comportamenti che hanno la funzione di attirare l' attenzione, sia positiva che negativa. Il *sentito* risponde ad un bisogno estremo di notorietà, che sembra soddisfare tutti i bisogni di appagamento, purché relativi alla definizione del *proprio territorio.* Si mettono in atto tutte le strategie, non importa se poco lecite o non rispettose delle regole, affinché chiunque possa guardare solo verso la propria direzione. Gli interventi educativi, in questo caso, hanno bisogno di particolari accortezze, in quanto ogni atteggiamento di contrasto, può essere percepito come rinforzo (negativo): occorre far orientare la percezione di appagamento e possibilità di crescita personale soprattutto *attirando l' attenzione* su comportamenti adeguati messi in atto da pari o altre figure autorevoli, creando condizioni ed esperienze che evidenzino come il rispetto condiviso e adeguate prassi, siano alla base di crescita e affermazione personale.
(Es:Fig.7) *L'UNIVERSO INTERO SEMBRA RUOTARE INTORNO AI PROPRI BISOGNI E SODDISFARLI IMMEDIATAMENTE* Quando si osservano individui che denotano eccessiva sicurezza personale, che può condurre alla noncuranza verso le attività proposte ed un approccio verso le stesse distaccato e sufficiente, è possibile che il *bisogno territoriale,* quindi la sicurezza personale, sia talmente soddisfatto, da impedire ogni possibile apertura ad ulteriori esperienze formative, ritenute di conseguenza superflue per la propria sopravvivenza. Può essere la condizione ottimale per stimolare talenti e creatività, ma prima è necessario maturare adeguate competenze, infatti l'eccessiva, ostentata, sicurezza, o appagamento, possono rivelarsi un grande limite al corretto percorso di crescita. E' stato osservato che la *funzione* di questo comportamento risponde alla necessità di rendersi inattaccabili da tutte quelle situazioni che potrebbero *alterare* o compromettere un *sentito* di totale appagamento dei propri bisogni vitali. L'intervento potrebbe prevedere l'individuazione di nuovi *bisogni*, altamente motivanti, da far percepire come parti inesplorate di quell'*universo* personale, in ogni caso da salvaguardare, dove è possibile ancora crescere e migliorare.

Figura 8: Guardare l'ambiente con aria circospetta

Figura 7: Sentirsi perfetti, intoccabili e sufficienti

Figura 9: Frequenti riferiti di dolore fisico e malessere generale

BISOGNO EMERGENTE: ***PROTEZIONE***

CONDIZIONI AUSPICABILI A TUTELA DELLA PROPRIA INCOLUMITA' FISICA ED EMOTIVA

(Es:Fig 8) ATTEGGIAMENTI DI GRANDE CIRCOSPEZIONE CHE LIMITANO MOTRICITA' E VERBALIZZAZIONE Quando si osserva un atteggiamento confuso e disorientato, tendenzialmente definito come deficit attentivo, il sentito soggettivo potrebbe riferirsi al bisogno di protezione ed alla difficoltà di riuscire a tenere sotto controllo tutti gli elementi presenti in un ambiente, perché ritenuti pericolosi. Altro elemento che caratterizza questo aspetto è la difficoltà nelle attività di imitazione, presumibilmente si rifiuta tutto ciò che non sia prima stato compreso ed accolto, sia per provenienza che nella funzione educativa. Un aiuto immediato può essere quello di posizionare l'individuo in zone che garantiscano almeno un lato protetto: in fondo alla classe, con le spalle vicino al muro, meglio con la vicinanza di compagni tranquilli e prevedibili, e porte bene in vista. Fra gli interventi , oltre alla frequente predisposizione e proposta di attività strutturate, può essere opportuno rendere il bambino consapevole dei suoi timori e anticipare quanto possibile le attività didattiche con dettagliate spiegazioni sulle possibili variazioni di status ambientali. La preventiva acquisizione di informazioni, potrebbe agevolare la comprensione delle nuove dinamiche e liberarle dal carattere di pericolosità, togliendo energia al bisogno di controllo costante sull'ambiente.

(Es: Fig.9)FREQUENTI RICHIESTE DI ATTENZIONE PER RIFERITI DI DOLORE O MALESSERE GENERALE SENZA REALI RISCONTRI CLINICI In ambiente scolastico, è frequente constatare la comparsa di dolori fisici, soprattutto fra gli alunni più piccoli. I meccanismi di attivazione potrebbero ritrovarsi nei rinforzi negativi elargiti da genitori e altre figure di riferimento in apprensione legittima per le condizioni di salute dei propri figli. La funzione del dolore riporta così l'individuo nella ricerca di protezione ed attenzione, altrimenti non percepite. Per l'estinzione di tale comportamento, è opportuno dedicare inizialmente l'attesa attenzione, in quanto anche se il disagio non risulta imputabile a patologia clinica riscontrata, può essere conseguenza di importanti *sentiti* conflittuali relativi all'ambiente in cui viene dichiarato. Negli individui con tale predisposizione, ogni *sentito di abbandono* dalle figure di riferimento più autorevoli, ricrea le condizioni fisico-dolorose per l'istintiva ricerca di protezione. Gli interventi, dopo iniziale accoglienza incondizionata, dovrebbero gradualmente sminuire l' importanza dei riferiti dolorosi e ricreare le ottimali condizioni di relazione con tutto il nuovo ambiente. Potrebbe anche essere utile elargire generosamente atteggiamenti di cura e premura prima che la manifestazione dolorosa si ripresenti.

BISOGNO EMERGENTE: *APPARTENENZA*

CONDIZIONI AMBIENTALI E SOCIALI IN CUI GLI INDIVIDUI SI RICONOSCONO E NE TRAGGONO POTERE E FORZA

(Es: Fig.10) DIFFICOLTA' DI INTEGRAZIONE CON IL GRUPPO DEI PARI Tale comportamento, assume caratteristiche problematiche, in quanto le difficoltà di integrazione, possono evidenziare *sentiti* di inadeguatezza alle *performance* espresse dai pari, ed alimentare ulteriormente i bassi livelli di autostima e scarsa coscienza delle proprie capacità. Può essere conseguenza di esperienze pregresse lontane geograficamente o culturalmente, o di atteggiamenti educativi rigidi e poco interiorizzati. Il bisogno di *appartenenza al gruppo,* non soddisfatto, può condizionare gli apprendimenti in maniera consistente. Occorre guidare l'individuo verso il riconoscimento del proprio valore e adeguata autostima, che potranno agevolare opportune dinamiche di relazione, necessarie per integrarsi autonomamente all'interno del gruppo scelto. Gli interventi, mai compassionevoli o forzati per fare accogliere l'individuo nel gruppo , dovranno valorizzare e rendere note le peculiarità positive di ciascuno, in maniera da far percepire ad entrambe le parti il potenziale di arricchimento che deriva dall' accoglienza e dalla condivisione di ogni *diversa* prospettiva.

(Es: Fig.11)QUANDO LA RICHIESTA DI CONTATTO FISICO CREA CONTINUE SOLUZIONI DI CONTINUITA' AL FLUIRE DEL COMPORTAMENTO ATTESO. Si rileva un bisogno irrefrenabile di ricerca di contatto , sia verso i pari che verso gli adulti, supportato da *sentiti* soggettivi di paura di abbandono, che sembrano placarsi solo nella percezione di contatto fisico.

Figura 11: Continua ricerca di contatto fisico

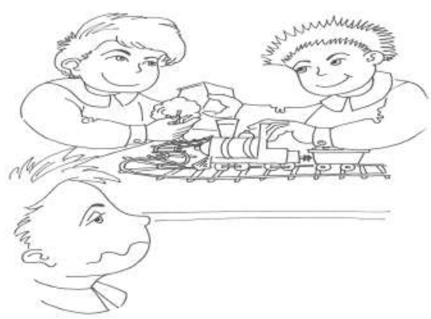


Figura 10: I pari visti come irraggiungibili dèi

In alcune situazioni, è emerso che atteggiamenti educativi non compresi nel loro significato verbale, e interpretati come minacce di abbandono, fossero alla base di questi atteggiamenti. *" Se non ti comporti come si deve non ti voglio più".* Frasi dette con l'intento di motivare, possono invece alimentare questi *sentit*i e condizionare enormemente il potenziale di apprendimento, anche perché difficilmente comprese nel loro significato simbolico. Il "come si deve" può rappresentare un tunnel senza uscita, e l'individuo può temere di perdere chiunque senza comprenderne il motivo. Si è osservato che affidare incarichi di cura e responsabilità verso altri individui in difficoltà, riesca a sollecitare la presa di coscienza di capacità ed autonomie personali ed estinguere il comportamento non adeguato.

IL PIANTO COME *PASSPARTOUT*
UNIVERSALE LINGUAGGIO DI DISAGIO E SOFFERENZA

(Es Fig.12)LE TENSIONI ACCUMULATE ED INESPRESSE PER RELATIVI LUNGHI PERIODI, DEVONO NECESSARIAMENTE ESSERE COMUNICATE, IL PIANTO NE RAPPRESENTA IL LINGUAGGIO UNIVERSALE

Nel caso in cui l'individuo utilizzi il pianto come costante modalità di comunicazione, e ne trovi la motivazione in circostanze poco opportune o difficilmente comprensibili, è possibile che un generale *sentito* di inadeguatezza , onduca le sue sensazioni in *sentiti* di pericolo generalizzato, con relativa grande sofferenza nelle proposte di relazioni che si devono gestire in ambiti diversi da quello di origine, ritenuto l'unico appagante. Fra gli individui più giovani, potrebbe essere espressione di difficoltà nella comunicazione di disagi relativi a vari *bisogni* insoddisfatti, o generalmente una labile resistenza alla frustrazione indotta da dinamiche ambientali ancora non accettate o comprese. In questi casi, è opportuno scoprire il maggiore disagio o conflitto ambientale ed offrirsi per la ricerca della sua soluzione. Il ricorso immediato a distrattori positivi può aiutare ad interrompere il disagio nel tempo necessario alla strutturazione di attività in grado di compensare i bisogni individuati. Successivamente sarà possibile offrire le condizioni ricercate solo se richieste in modo adeguato, fino all'estinzione del comportamento non opportuno.

Figura 12: Pianto frequente senza motivo o scatenato da eventi apparentemente banali

CONCLUSIONI

Ogni individuo, consapevolmente appagato nei bisogni inerenti la propria sussistenza e sopravvivenza, si pone in condizioni di crescita ed evoluzione personale, attivando capacità e potenzialità personali nell'acquisizione di nuove esperienze e conoscenze.

Nello stesso modo, in assenza di tale appagamento, ogni azione perseguirà istintivamente ed in maniera preponderante, una funzione utile al bisogno da soddisfare.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia la preziosa arte del Prof. Marco Giubbilei nella esplicativa realizzazione delle immagini.

VIVERE UNA FUNZIONE

Elisabetta OSSANNA[1], Sara BONORA[2]

[1]*Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Trento, Trento (TN)*

[2]*Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Università degli Studi di Trento, Trento (TN)*

Riassunto

Minimizziamo il costo di realizzazione di una rete per la fibra ottica. Tramite la presentazione di un semplice problema si materializza così una funzione, si mette in luce la relazione tra la variabile dipendente ed indipendente, si concretizza il suo grafico srotolando la rete e si stima il minimo per approssimazioni successive. Manipolazione e tecnologia si alternano per raggiungere l'obiettivo.

Introduzione

Questo lavoro si ispira al problema di Steiner riferito a tre città poste ai vertici di un triangolo equilatero e cerca di mettere in particolare luce alcuni aspetti legati al linguaggio delle funzioni, dal concetto stesso alla rappresentazione grafica. Il laboratorio è stato sviluppato come progetto sperimentale all'interno del corso *"Tecniche di laboratorio per la didattica della matematica"* del corso di laurea magistrale in Matematica dell'Università di Trento da Angela Carlin, Joannes Pfaender, Marta Stach insieme alle autrici, che per la sua realizzazione si sono appoggiati al laboratorio DiCoMat[1]. Per la parte che riguarda la verifica sperimentale con le lamine saponate si è fatto riferimento alla sezione "Reti minime" del quaderno di laboratorio "Problemi di massimo e di minimo" [Luminati-Tamanini, 2009]. La sperimentazione si è realizzata in una classe prima della Scuola Secondaria di Secondo Grado.
Un pannello con occhioli in cui far scorrere uno spago permette di rappresentare fisicamente il problema in oggetto e di sperimentare in modo dinamico una funzione (si veda fig. 3). Infatti la lunghezza della rete dipende da un punto che varia nella parte di piano considerata (si veda fig. 1). Il problema crea l'occasione per fare ipotesi, cercando un filo conduttore che porti ad una ragionevole congettura, che andrà poi testata e verificata attraverso strategie di diverso tipo. La natura del problema e gli strumenti a disposizione portano a cercare una descrizione degli elementi in gioco che permetta una facile e ragionevole comparazione. Questo può avvenire sfruttando la corda come strumento di misura e come mezzo fisico per la visualizzazione. L'ambiente più adatto per la comparazione è quello del piano cartesiano che viene ricreato in modo fisico e semplificato sul pavimento. Si crea così l'occasione per sperimentare e mettere le basi del concetto di grafico di una funzione. L'inadeguatezza delle misure sperimentali farà nascere l'esigenza di indagare il problema attraverso supporti digitali (foglio di calcolo), che vengono utilizzati per guidare gli studenti verso una modellizzazione algebrica del problema. In conclusione un esperimento che sfrutta le lamine di sapone permette agli studenti di verificare le loro congetture e i risultati sviluppati nell'arco dell'attività.

Il problema e la congettura

Nella prima fase del laboratorio presentiamo il problema in una cornice narrativa: tre città, che si trovano ai vertici di un triangolo equilatero, devono essere collegate tramite una rete a fibra ottica, minimizzando la lunghezza della rete di collegamento.

[1] http://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab

In questa fase gli studenti sono suddivisi a piccoli gruppi e hanno a disposizione un pannello di compensato con degli occhioli ai vertici di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo 50 cm, e i cui vertici corrispondono alle tre città (si veda fig. 3). Utilizzando lo spago, che rappresenta la fibra, gli studenti possono quindi sperimentare praticamente diverse configurazioni della rete. L'indagine sul problema è quindi mediata dallo strumento.

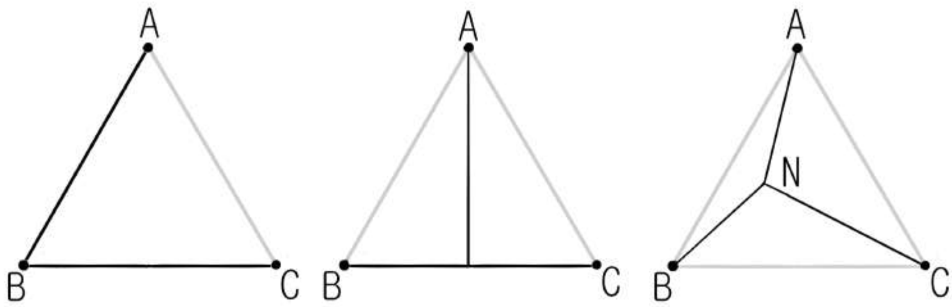


Figura 1 -Esempi di configurazioni sul nostro sistema

In riferimento alla figura 1, chiameremo configurazione a "V" quella in cui la rete corrisponde all'unione di due lati del triangolo, configurazione a "T" quella in cui la rete corrisponde all'altezza del triangolo unita al lato corrispondente e configurazione ad "Y", quella in cui è stato aggiunto un punto di diramazione N, che chiameremo nodo centrale, all'interno del triangolo. Per superare la rigidità delle prime configurazioni risulta utile spingere gli studenti a sfruttare appieno le potenzialità dello strumento a disposizione. Sperimentare configurazioni differenti e fare considerazioni pratiche sulle lunghezze dei vari archi risulta più facile avendo a disposizione dello spago da poter tagliare, annodare e confrontare. Come esempio mostriamo in figura 2 un possibile utilizzo dello strumento per giustificare il fatto che la configurazione a "T" è migliore di quella a "V". Un nuovo pezzo di spago (in rosso in figura 2), dinamicamente inserito nella configurazione a "V", permette di apprezzare il miglioramento in termini di lunghezza della diverse reti che si vengono a formare.

Figura 2 – Confronto dinamico di più reti

Chiediamo agli studenti di ordinare le loro ipotesi di reti, da quella con lunghezza maggiore a quella con lunghezza minore. Ogni gruppo dovrà poi disegnare le proprie ipotesi su cartoncini, che riportano i vertici del triangolo, per poi appenderli alla parete in ordine decrescente. Vogliamo creare così un momento di confronto tra i gruppi e mantenere traccia delle congetture iniziali durante le fasi successive. Lasciamo decidere all'insegnante se sia più efficace per gli studenti ottenere le lunghezze tramite misurazione diretta (figura 3), oppure sfruttando le diseguaglianze date dalla geometria dei triangoli.

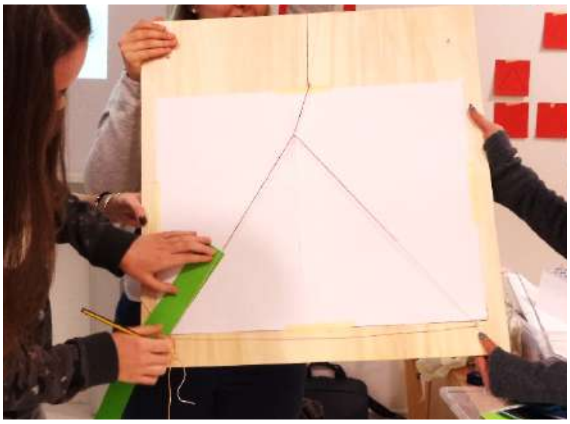


Figura 3 – Il pannello per simulare le reti.

Invitiamo in seguito gli studenti a operare dinamicamente per osservare come la lunghezza della rete vari con continuità all'interno delle due configurazioni "T" e "V", che possiamo considerare come casi limite di configurazioni di tipo "Y". Resta quindi il problema di definire una o più proprietà sulla configurazione ad "Y" per poter iniziare a limitare ulteriormente l'insieme delle reti tra cui cercare la soluzione del nostro problema.
Vogliamo portare gli studenti a considerare il fatto che, fissata la distanza tra il nodo N e il lato BC, la configurazione con lunghezza minore è quella per cui N giace sull'asse di BC. Questo può essere fatto riprendendo il problema sui triangoli equiestesi applicandolo a questo caso specifico. Ispirandoci a Emma Castelnuovo [Castelnuovo, riedizione 2017] prendiamo un'asta metallica con un anello, due elastici di egual misura fissati agli occhioli e all'anello (fig. 4). Portiamo gli studenti a osservare come, tenendo l'asta parallela a BC e mettendo in tensione gli elastici, in qualunque posizione noi poniamo l'anello, al momento del rilascio esso tornerà sempre in posizione centrale, formando con gli elastici un triangolo isoscele (fig. 4).

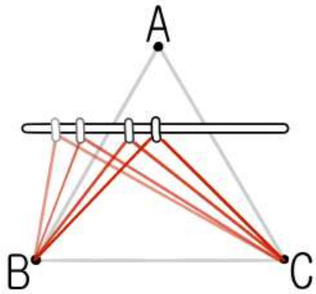


Figura 4 - Sistema con gli elastici

Attraverso una discussione matematica guidata dall'insegnante gli studenti arrivano alla descrizione della caratteristica delle reti da prendere in considerazione: il nodo centrale N giace sull'asse del segmento BC.

La funzione "lunghezza della rete"

Vogliamo ora creare un contesto adatto ad introdurre la funzione oggetto del nostro laboratorio: la funzione "lunghezza della rete", ristretta all'asse del segmento BC. L'approccio, ovviamente, non sarà formale, ma pratico, e sarà volto a costruire significati relativi al concetto di funzione e alle sue rappresentazioni. Vogliamo che l'idea di funzione si alimenti dell'esperienza concreta che avviene lavorando con il materiale a disposizione.
Innanzitutto abbiamo bisogno di descrivere con precisione la posizione del nodo centrale N. Per fare questo posizioniamo un metro da sarto sull'asse del triangolo in modo da identificare la posizione di N attraverso la sua quota (fig. 5). Gli studenti possono sperimentare la corrispondenza

tra il punto N e la rete che si crea, e di conseguenza la sua lunghezza. Questo momento è importante per cogliere la relazione di dipendenza funzionale tra la lunghezza della rete e la quota della posizione di N. In pratica si sperimenta che la lunghezza della rete varia e il suo variare dipende dalla posizione di N.
In particolare, passando dalla configurazione a "T" a una a "Y" con gradualità, la lunghezza della rete varia "con continuità" e inizialmente diminuisce. Quando il nodo è vicino all'altra posizione limite, cioè la configurazione a "V", la lunghezza cresce fino ad arrivare a una lunghezza superiore rispetto alla configurazione iniziale a "T". Si può quindi intuire che ci sia una posizione di minimo per il nostro sistema. Questo tipo di ragionamento ricalca le proposte di Emma Castelnuovo in vari problemi presentati in "Didattica della matematica" [Castelnuovo, riedizione 2017].

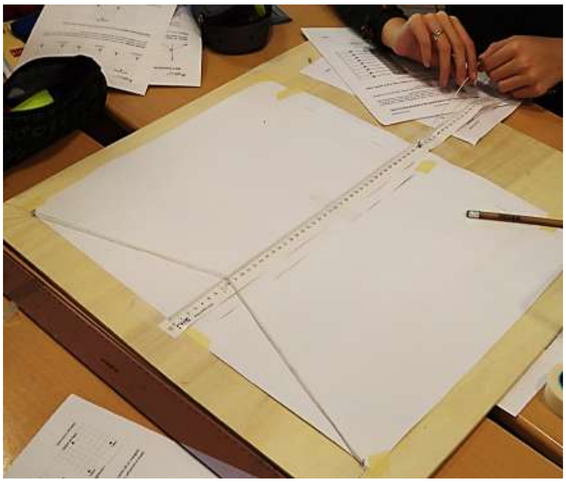


Figura 5 - Il metro fissato sull'asse del triangolo

Per proseguire nella risoluzione del problema iniziale dobbiamo essere in grado di confrontare la lunghezza delle reti ottenute. Per indurre a operare un confronto diretto, gli studenti operano senza metro e uniscono gli archi della rete, ottenendo un unico pezzo. La rete viene così "riassemblata" in un unico segmento in modo che, pur restando su un piano materiale, sia più facile operare un confronto tra le lunghezze. Il confronto risulta però inutile, se non si tiene traccia della posizione del nodo N. Per questo predisponiamo sul pavimento un metro da sarto e un pezzo di nastro adesivo colorato perpendicolare a esso, in modo tale da creare idealmente gli assi di un piano cartesiano.

Figura 6 - Gli studenti al lavoro con le "reti riassemblate"

Gli studenti possono ora "srotolare" sul pavimento il pezzo di spago colorato che corrisponde alla rete "riassemblata", avendo cura di posizionare un estremo del pezzo di spago sul metro da sarto in corrispondenza della quota in cui si trovava il nodo centrale della rete che stanno riproducendo (fig.6). Ciò che costruiscono in questo modo serve a raffigurare fisicamente la variazione della rete:

davanti a loro vi è la rappresentazione di quanto ipotizzato e osservato attraverso il sistema dinamico costruito. Osserviamo che, se avessimo fatto misurare direttamente le reti, non ci sarebbe stata la necessità del confronto realizzato fisicamente, che è però fondamentale in quanto ci porta alla rappresentazione della funzione tramite spaghi colorati, che altro non sono se non le ordinate del grafico.

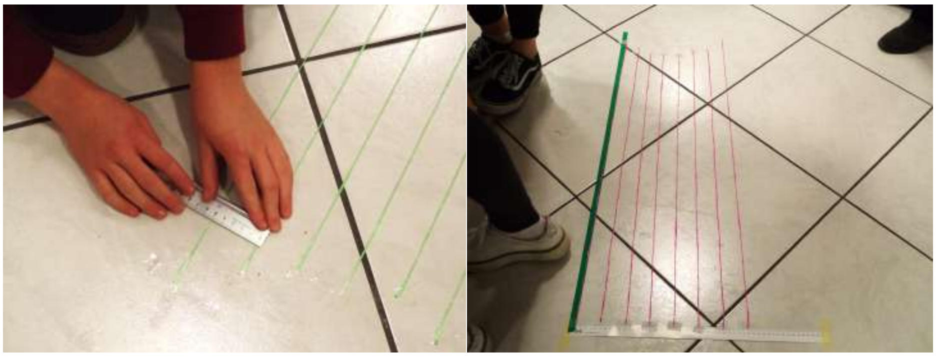


Figura 7 – La lunghezza della rete "si srotola" nel piano cartesiano

Per questo lavoro abbiamo suggerito posizioni equidistanti (fig. 7), ma si potrebbe lasciar scegliere agli studenti le posizioni. L'unico rischio è che indaghino posizioni molto vicine al baricentro, nel qual caso le variazioni della lunghezza non sono apprezzabili con questa modalità sperimentale. L'indagine libera potrebbe arricchire la discussione, ma richiede un investimento di tempo ed energie che solo l'insegnante può valutare a seconda del contesto.
Per arricchire ulteriormente l'esperienza e la discussione, possiamo rappresentare la nostra funzione tramite una tabella e tramite la sua rappresentazione grafica. Per questo gli studenti misurano i pezzi di spago e inseriscono nello schema loro fornito le rispettive misure (fig. 8).

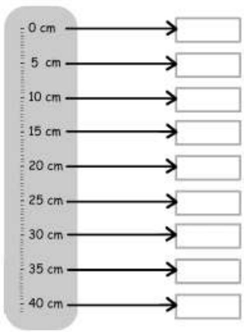


Figura 8 - Lo schema presentato nelle schede di lavoro

Possiamo qui osservare come lo schema dato non sia una tradizionale tabella a doppia entrata, ma riproduca il modello concreto del pannello e del pavimento, per traghettare lo studente dall'esperienza concreta alla rappresentazione grafica della funzione. Infine chiediamo di inserire in un piano cartesiano i punti che corrispondono all'estremo dello spago che non giace sul metro (fig. 9). Abbiamo così portato gli studenti a rappresentare la nostra funzione tramite i punti "più alti" dei segmenti che rappresentano le varie reti ("quota di N"-"lunghezza della rete di nodo centrale N"), cioè i punti del grafico, creando l'occasione per una discussione sul significato di quei punti e sulle informazioni che ci possono dare relativamente alla funzione che stiamo studiando.

Figura 9 – Rappresentazione dei punti del grafico

Per esempio, chiedere come si è giunti a disegnare un particolare punto, porta lo studente a ripercorrere a ritroso il cammino che lo ha portato lì. Questo può contribuire alla costruzione del significato di grafico di una funzione.
L’osservazione delle rappresentazioni che abbiamo sul pavimento, realizzate dai vari gruppi, diventa un’interessante guida per una discussione che tocchi i due aspetti seguenti.

a) L’andamento della funzione “lunghezza della rete di nodo N” è coerente con le osservazioni iniziali (casi limite, crescenza – decrescenza), come si vede in figura 10.

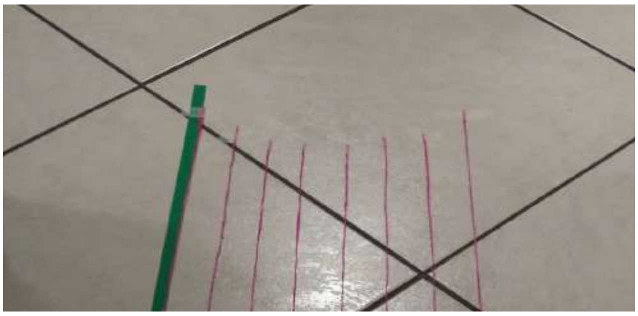


Figura 10 – L’andamento

b) In alcune rappresentazioni si trovano delle incongruenze rispetto alle ipotesi iniziali, dovute a errori di misura e all'imprecisione del metodo utilizzato. Per esempio, gruppi diversi ottengono misure diverse di reti uguali; oppure reti con nodi vicini non presentano apprezzabili differenze nelle loro lunghezze (fig. 11).

Figura 11 - Un confronto

Serve quindi un metodo più affidabile per calcolare la lunghezza della nostra rete. Gli studenti sono spinti ad utilizzare il ragionamento geometrico e il problema viene affrontato utilizzando il teorema di Pitagora, almeno per alcune posizioni del nodo per cui l'osservazione precedente aveva fatto emergere delle incongruenze. Questo permette anche di attivare negli studenti competenze metacognitive, in quanto sono spinti a controllare il proprio lavoro in funzione delle osservazioni relative alle misure. A questo punto, pur avendo le misure precise della lunghezza della rete in alcuni punti, cercheremo di avviare una discussione finalizzata a migliorare la ricerca della posizione del nodo che identifica la lunghezza minima. Ricordiamo che nella fase di indagine iniziale abbiamo ipotizzato che la lunghezza della rete variasse con continuità. Dopo questa fase di discussione collettiva l'obiettivo è individuare un *"intervallo sospetto"* entro cui possa stare il valore della quota di N. Questo intervallo avrà come estremi il punto a sinistra e quello a destra del punto trovato come minimo tra quelli calcolati.

Un ragionamento spontaneo di alcuni studenti potrebbe essere quello di cercare il valore minimo tra quelli misurati da loro, ossia pensare che il punto minore tra quelli misurati sia il minore possibile tra tutti i valori, anche quelli non calcolati o misurati, come rappresentato nel grafico 1 di figura 12. Per questo è utile stimolare una discussione, supportata da esempi e controesempi, che porti gli studenti a valutare schemi del tipo 2 e 3 in figura 12.

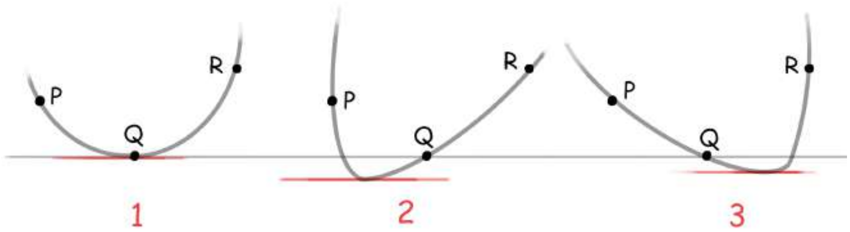


Figura 12 -

Raffiniamo il calcolo della lunghezza e andiamo verso il minimo

Avendo ristretto l'intervallo di indagine, si rende necessario rifare il calcolo della lunghezza delle reti valutando nodi sempre più vicini. Si può pensare di chiedere agli studenti di fare alcuni calcoli con la calcolatrice, mostrando loro come diventi un processo lungo e ripetitivo. Per ovviare a ciò proponiamo l'utilizzo di un foglio di calcolo impostando il lavoro come in figura 13.

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
A2	=43,3-A2	625	=A2^2	=SQRT(C2+D2)	=2*E2+B2
10	33,3	625	100	26,926	87,152
11	32,3	625	121	27,313	86,926
12	31,3	625	144	27,731	86,762
13	30,3	625	169	28,178	86,656
14	29,3	625	196	28,653	86,606
15	28,3	625	225	29,155	86,610
16	27,3	625	256	29,682	86,663
17	26,3	625	289	30,232	86,765
18	25,3	625	324	30,806	86,912
19	24,3	625	361	31,401	87,101
20	23,3	625	400	32,016	87,331

Figura 13 – Lavorando con il foglio di calcolo.

Abbiamo così un'occasione concreta per sperimentare l'effetto degli stessi calcoli su più numeri, dando significato alla variabile che potrebbe essere utilizzata, se si arriva alla modellizzazione

algebrica del nostro problema. L'uso delle formule del foglio di calcolo diventa essenziale per reiterare i calcoli, modificare l'incremento tra un valore e il successivo, e in seguito sostituire "il riferimento di cella" con la variabile. Per arrivare alla modellizzazione algebrica è utile provare a sintetizzare i passi in un'unica formula che faccia riferimento alla cella relativa alla quota del nodo centrale N.
Il lavoro con il foglio di calcolo può stimolare gli studenti a gestire attivamente l'indagine, scegliendo opportunamente l'intervallo e l'incremento utile per affinare il calcolo. I valori in gioco sono legati tra loro da una relazione funzionale, e i valori su cui si testa la funzione superano necessariamente l'insieme dei numeri naturali, dato che l'incremento di 1 cm non dà risultati soddisfacenti (fig. 13). Un altro aspetto importante riguarda il fatto che il processo che stiamo seguendo non porta alla soluzione, ma a una sua approssimazione. Lo studente è portato a decidere autonomamente quando l'approssimazione è "sufficientemente buona" per dare una risposta ragionevole al problema, osservando che l'errore può diminuire indefinitamente.

Primo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
13	30,3	625	169	28,178	86,656
13,5	29,8	625	182,25	28,412	86,624
14	29,3	625	196	28,653	86,606
14,5	28,8	625	210,25	28,901	86,601
15	28,3	625	225	29,155	86,610

Secondo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
14	29,3	625	196	28,653	86,606
14,2	29,1	625	201,64	28,751	86,603
14,4	28,9	625	207,36	28,851	86,601
14,6	28,7	625	213,16	28,951	86,602
14,8	28,5	625	219,04	29,052	86,605
15	28,3	625	225	29,155	86,610

Terzo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
14,2	29,1	625	201,64	28,7513	86,6027
14,3	29	625	204,49	28,8009	86,6017
14,4	28,9	625	207,36	28,8506	86,6013
14,5	28,8	625	210,25	28,9007	86,6014
14,6	28,7	625	213,16	28,9510	86,6020

Figura 14 – Raffinamenti del calcolo.

Come si vede dalla figura 14 l'indagine può proseguire riducendo l'errore. Accontentandosi di un errore pari al millimetro, il valore approssimato risulterebbe 14,4 cm, e la soluzione del problema si troverebbe tra 14,3 cm e 14,5 cm. Disegnando sul pannello il valore stimato per la quota del nodo N, si può verificare che corrisponde con buona approssimazione con il baricentro del triangolo (trovato come intersezione di due assi del triangolo).

Conclusione: una prova fisica con le lamine di sapone

A conclusione del laboratorio si può proporre agli studenti una verifica sperimentale della soluzione. Per questa fase facciamo riferimento al lavoro contenuto in "*Problemi di Massimo e di minimo*" [Tamanini – Luminati 2009]. Ciascun gruppo ha a disposizione due lastrine parallele di plexiglas accoppiate con tre pioli posti ai vertici di un triangolo equilatero, una bacinella con acqua saponata e un indicatore di angoli a 120°. Quando si estrae la lastrina immersa nell'acqua saponata, si osserva la formazione di tre lamine che collegano i tre pioli. Quelle che si osservano sono le configurazioni di equilibrio stabile delle lamine, che rendono minima l'area della loro superficie a causa della tensione superficiale che tende a ridurle [Luminati – Tamanini, pag. 14]. Le lamine sono nastri rettangolari di altezza costante e quindi la loro area è proporzionale alla lunghezza delle basi. Quindi l'area minima si ottiene se è minima la lunghezza della rete che congiunge i pioli. Quest'ultima osservazione mette in relazione l'esperimento con il nostro problema: la lamina saponata rappresenta la rete di lunghezza minima che collega i tre vertici di un triangolo equilatero. Utilizzando l'indicatore di angoli, si può osservare che le lamine si incontrano lungo uno spigolo, formando a due a due angoli di 120°.

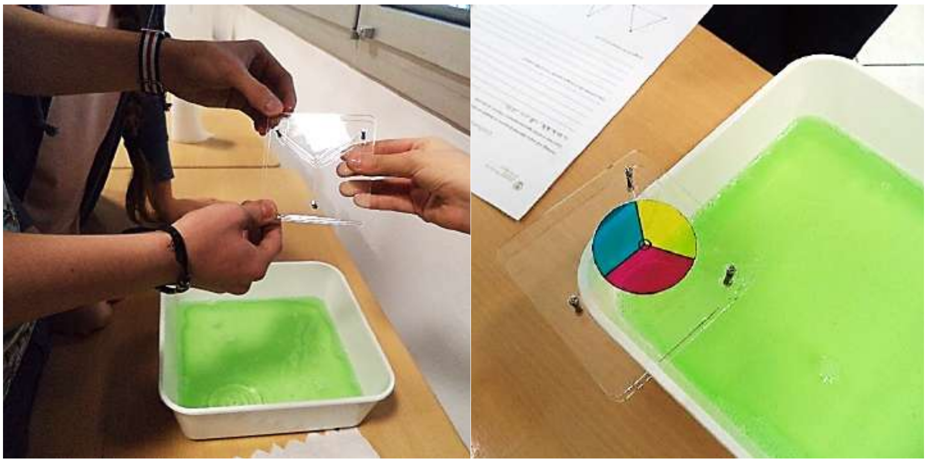


Figura 15 – Lastrine e lamine saponate.

Per concludere gli studenti son invitati a verificare che anche la conformazione trovata con la corda sul pannello forma angoli congruenti tra loro, ovvero di 120°. Portando la corda e il nodo centrale fino a soddisfare questo vincolo, si può verificare se la quota del nodo N sia compatibile con quanto trovato nelle fasi precedenti del percorso (fig. 16). Questo collegamento tra il risultato geometrico trovato con le lamine saponate e l'approssimazione della quota del nodo trovata precedentemente non è risultato di immediata realizzazione per gli studenti.

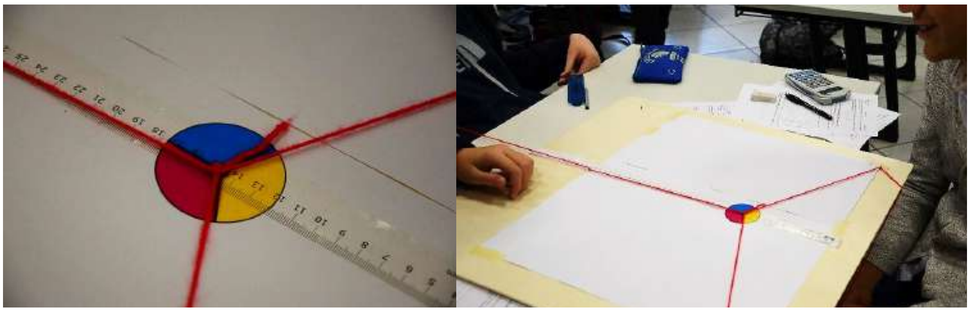


Figura 16 – Il punto di vista degli angoli sul pannello.

Le lastrine con pioli disposti diversamente (fig. 17) permettono di osservare sperimentalmente che il nodo centrale delle rete, in generale, non coincide con il baricentro, come accade invece per il triangolo equilatero.

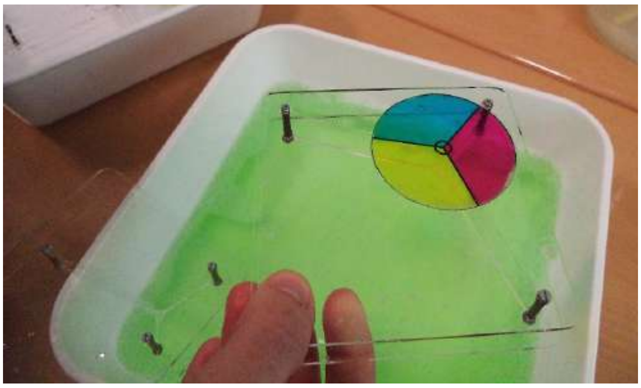


Figura 17 – Il caso di un triangolo non equilatero.

Materiale utilizzato nel laboratorio

Per ogni gruppo, oltre alle schede di lavoro:

- un pannello di compensato con degli occhioli metallici in corrispondenza dei vertici di un triangolo equilatero, uno per gruppo;
- spago;
- forbici;
- metro da sarto;
- piano cartesiano segnato sul pavimento con nastro adesivo colorato e metro da sarto;
- 5 tessere colorate con i vertici del triangolo equilatero segnati;
- lastrine parallele di plexiglas accoppiate con tre pioli posti ai vertici di un triangolo equilatero;
- una bacinella con acqua e sapone;
- guanti per tutti.

Riferimenti bibliografici

LUMINATI D. & TAMANINI I, 2009, Problemi di massimo e di minimo, Milano, Mimesis Edizioni.]
EMMA CASTELNUOVO, ARZARELLO F. (curatore); BARTOLINI M. G. (curatore), 2017, Didattica della matematica, UTET Università
Schede di lavoro disponibili su http://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab/percorsi-didattici-rivolti-principalmente-classi-della-scuola-secondaria-di-primo, alla voce "Vivere una funzione"

Ringraziamenti

Si ringraziano la prof.ssa Maura Bonazza e il prof. Michele Avancini del Collegio Arcivescovile "C. Endrici" per averci ospitato nelle loro classi prime, permettendoci di sperimentare il percorso qui presentato.

GIOCANDO CON IL PAESAGGIO, OVVERO ALLA SCOPERTA DEL "NOSTRO" PUNTO DI VISTA. PROGETTO "SPAZIO E FIGURE".

Antonella CASARINI[1], **Margherita FARONI**[2]

[1]*I.C. "G. Marconi", Castelfranco Emilia (MO)*

[2]*Laurea Magistrale a ciclo unico in Scienze della Formazione primaria – sede di Reggio Emilia (RE)*[1]

Riassunto

Il progetto "Spazio e figure", svolto nella classe 1B della scuola primaria G. Marconi di Castefranco Emilia, è stato un percorso che ha sviluppato il macro tema dell'approccio allo spazio (inteso sia come spazio fisico ma anche come spazio geometrico) e del coordinamento dei punti di vista. Nello specifico l'attività progettuale ha assunto piena fisionomia nel laboratorio di classe "Il gioco dei paesaggi". L'intero percorso ha condotto i bambini a realizzare sempre più in autonomia un gioco di comunicazione. L'attività è stata incentrata sulla dettatura di un paesaggio in miniatura fra due bambini separati da uno schermo. Il punto di arrivo, la costruzione e la sempre più solida consapevolezza dei sistemi di riferimento spaziali, e l'iter per giungervi sono stati ricchi di stimoli. In particolare l'ambiente laboratoriale e la costante collaborazione e interazione tra pari hanno permesso l'inclusione di tutti, superando le singole diversità, le difficoltà cognitive e relazionali.

Parole chiave: *mediatori semiotici; laboratorio; indicatori spaziali; comunicazione; discussione matematica; cooperative learning.*

Introduzione

Il progetto qui presentato è stato condotto nell'ambito del GdRMM - G*ruppo di Ricerca sulle Macchine Matematiche*, un gruppo di docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado dell'Istituto Comprensivo "G. Marconi" di Castelfranco Emilia (MO) che da anni collabora con l'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, nello specifico con il Dipartimento di Educazione e Scienze Umane.

Il *Gruppo di Ricerca sulle Macchine Matematiche* dell'Istituto[2] ha come obiettivo principale quello di rendere più efficace la didattica matematico-scientifica attraverso l'uso di *artefatti* (macchine matematiche, applicativi e strumenti come mediatori semiotici) scelti di volta in volta in base alle conoscenze che si intendono veicolare e studiare[3]. Tale approccio si rivolge a tutti gli studenti, in particolar modo anche agli alunni che necessitano di maggiori attenzioni. In questa prospettiva di lavoro, e ai fini di un miglior supporto e acquisizione di abilità, competenze e conoscenze si è ritenuto di fondamentale importanza il porre l'attenzione al *contesto*. Le attività didattiche condotte dai docenti del gruppo di ricerca infatti si svolgono in un contesto di *laboratorio* (inserito nel macro progetto *geogiocando*)[4], all'interno del quale i gruppi di alunni sono organizzati in base alle regole del coperative learning e del "conoscere facendo" – ovviamente di volta in volta riviste e riadattate in base alle specifiche situazioni, esigenze ed attività. L'esperienza ha preso spunto da alcune

[1] Presso *Università degli Studi di Modena e Reggio, Dipartimento di Educazione e Scienze Umane.*
[2] A tal proposito è possibile consultare la documentazione pubblicata sul sito della scuola - www.scuolemarconi.it.
[3] Le attività e le progettazioni del Gruppo di Ricerca sulle Macchine Matematiche (GdRMM) si possono consultare sul geogiocando https://sites.google.com/site/geomlabo/home/progetti/geogiocando, e nelle pagine della Bottega Rinascimentale https://bottegamatematica.wordpress.com/.
[4] Cfr. GdRMM.

sperimentazioni didattiche condotte all'interno della scuola dell'infanzia e primaria[5] (Falcade e Strozzi, 2008; Bartolini Bussi, 2008) e basate su un gioco di comunicazione focalizzato sulla dettatura di un paesaggio in miniatura tra bambini che non si potevano vedere.

Il percorso

Il progetto sviluppato in forma laboratoriale, ha seguito le seguenti tappe (da novembre 2016 ad aprile 2017):

I. *Attività propedeutica*: brain-storming, acquisizione lessico, astrazione, primi approcci al piano, esercizi sul piano, (tot. ore: 12).

II. *Cos'è un paesaggio*: brain-storming sull'idea di paesaggio, cosa si trova in un paesaggio?, discussione collettiva, (tot. ore: 6).

III. *Gioco dei paesaggi*: preparazione dei materiali, allestimento delle postazioni, disegni, sessioni di gioco, discussione collettiva, (tot. ore: 25).

IV. *Evoluzione con i primi approcci al reticolo*: brain-storming sull'idea di precisione e esattezza, individuazione di uno strumento "esatto", (tot. ore:18).

Nella prima tappa, quella propedeutica, si è cercato di far conoscere e aumentare la consapevolezza lessicale relativa agli indicatori spaziali quali: *alto / basso, dietro / davanti, destra / sinistra, in mezzo / di lato*, ecc. Possedere con consapevolezza il lessico relativo allo spazio, alla localizzazione e al movimento è un primo passaggio fondamentale per potersi orientare correttamente. Durante le diverse discussioni matematiche (Bartolini Bussi, 1995)[6] i bambini sono stati condotti a chiedersi cosa significhi "orientarsi" e come sia possibile descrivere correttamente un ambiente. Sono quindi seguiti sul quaderno esercizi di localizzazione. Al termine di questo primo momento la maggior parte dei bambini localizza correttamente e possiede un buon sistema di riferimento, è in grado di riconoscere senza margine di errore dove si trova la destra o la sinistra, se un oggetto si trova in alto o in basso; l'unica difficoltà riscontrata per qualcuno è a livello di letto-scrittura. Se le parole infatti sono scritte senza che un adulto o un compagno le abbia prima lette o pronunciate, qualche bambino non riesce ancora a leggerle.
Nella seconda fase ci si è maggiormente avvicinati al concetto di *paesaggio* (con la tecnica del *brain storming*), chiedendo ai bambini cosa sia per loro il paesaggio e come esso dovrebbe essere. Se inizialmente si è concessa libertà ai pensieri, successivamente nella discussione si è chiesto ai bambini dove sia possibile incontrare un paesaggio, cosa si può vedere, se sono presenti, e quali sono, gli elementi naturali e / o artificiali. La classe lentamente giunge così ad indicare elementi comuni - *case, alberi, persone, panchine, animali, macchine, colline, scuola, strade*, ecc., elementi che si chiederà di ricordare, perché saranno proprio questi che entreranno nel gioco dei paesaggi vero e proprio. L'attività si conclude con un lavoro artistico di manipolazione: a coppie devono colorare, ritagliare e montare la sagoma di una casetta.
Nella terza fase, quella vera e propria del gioco dei paesaggi, si entra nel vivo dell'attività e dell'esperienza. Al centro dell'aula si posiziona un banco sul quale si allestisce un paesaggio con diversi elementi. Tutti i banchi sono sistemati attorno ad esso in forma quadrata, (cfr. fig. 1: i bambini sono disposti tutti intorno al tavolo centrale. I loro banchi quindi formano una nuova

[5] Già all'interno del GdRMM.
[6] Maria Giuseppina Bartolini Bussi afferma che "una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività insegnamento-apprendimento. Cfr. BARTOLINI BUSSI M.G., BONI M. e FERRI F., 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la Discussione Matematica*, Comune di Modena, Centro Documentazione Educativa, p. 7.

organizzazione dello spazio dell’aula formando un grande quadrato). In un primo momento tutta la classe è invitata ad osservare il paesaggio costruito, ogni lato dei banchi rappresenta un punto cardinale, ciascun bambino seduto nella proprio punto deve quindi disegnare solo ciò che vede dalla propria postazione, nulla di più. Questa è una prima attività di osservazione e disegno / copia dal vero nella quale i bambini non possono alzarsi o spostarsi per vedere meglio. Qui emergono molti spunti che verranno analizzati in un secondo momento attraverso una mostra collettiva. I bambini, ciascuno col gruppo del proprio lato, danno i disegni alla maestra la quale li attacca seguendo l’ordine di consegna alla lavagna. Quindi, un bambino alla volta spiega alla classe ciò che ha disegnato. A questo punto segue una discussione matematica.

Figura 1 UNA NUOVA ORGANIZZAZIONE DEI BANCHI. Al centro è posizionato il tavolo quadrato per il paesaggio.

Figura 2 TUTTI ALL’OPERA: COPIA DAL VERO. Al centro è visibile il paesaggio che i bambini, tutti intorno, devono copiare dalla propria postazione.

Figura 3 LA MOSTRA DEI DISEGNI. Il secondo disegno da sinistra nella fila in alto presenta una chiara stereotipia: il bambino ha disegnato il sole.

Figura 4 PRESENTAZIONE E DESCRIZIONE DEL PROPRIO DISEGNO[7].

Un ulteriore sviluppo della terza fase è l'installazione del *gioco dei paesaggi* vero e proprio. Nuovamente al centro dell'aula vengono disposti due tavoli quadrati uno di fianco all'altro divisi da uno schermo; due bambini giocatori vengono sorteggiati casualmente da un mazzetto di carte[8]. Un alunno costruisce e descrive il proprio paesaggio con i vari elementi utilizzati precedentemente: è il *codificatore* (pallino giallo in schema posizione di gioco), l'altro ascolta la descrizione e ricostruisce il paesaggio descritto con la copia degli stessi oggetti: è il *decodificatore* (pallino verde in schema posizione di gioco). La classe osserva e interviene durante la fase di revisione e confronto (pallini rossi in schema posizione di gioco). Le prime coppie giocano posizionandosi entrambe frontalmente rispetto al proprio banco (bambino codificatore e bambino decodificatore guardano nella stessa direzione e sono appoggiati sullo stesso lato dei tavoli affiancati); le coppie successive, per alzare il grado di difficoltà, invece si dispongono sui due lati opposti e frontali (anche se in mezzo è presente lo schermo, i due bambini sono uno di fronte all'altro).

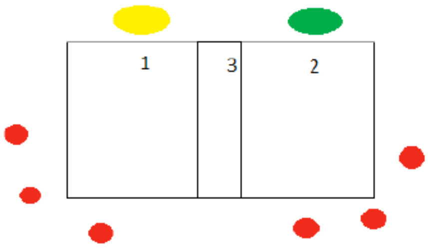


Figura 5 Prima posizione di gioco: 1_ primo tavolo con bambino codificatore. 2_ secondo tavolo con bambino decodificatore. 3_ schermo. Intorno osservano tutti i bambini della classe. I due giocatori sono in posizione allineata.

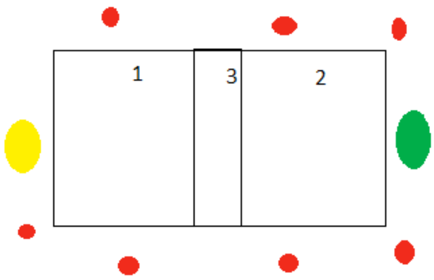


Figura 6 Seconda posizione di gioco: 1_ primo tavolo con bambino codificatore. 2_ secondo tavolo con bambino decodificatore. 3_ schermo. Intorno osservano tutti i bambini della classe. I due giocatori sono in posizione frontale.

---

[7] Alla LIM è proiettata la fotografia del paesaggio che si poteva osservare dalla posizione esatta del bambino alla lavagna. Questo esercizio di confronto permette l'osservazione e la rilevazione delle differenze / somiglianze tra il paesaggio al centro dell'aula e il disegno realizzato.

[8] Nella progettazione si sono svolti cinque turni di gioco.

Il bambino codificatore deve descrivere il proprio paesaggio in modo chiaro e preciso così che il compagno decodificatore (fuori dall'aula mentre il primo allestiva il proprio banco) possa replicare correttamente quanto enunciato. Nel momento in cui viene tolto lo schermo la coppia osserva i rispettivi paesaggi e cerca di trovare le uguaglianze e le eventuali differenze, anche la classe a questo punto interviene per esprimere ciò che fino a quel momento aveva solo potuto osservare in silenzio. Da questa discussione collettiva emerge un problema sostanziale: non sempre i paesaggi sono uguali, anzi talvolta le differenze sono davvero molto evidenti. Come è quindi possibile risolvere questa situazione di problematica?

Figura 7 ELEMENTI PER IL GIOCO DEL PAESAGGIO.

Gli oggetti sono tutti in numero doppio perché i paesaggi da realizzare sono due[9].

Figura 8 PRIMA POSIZIONE DI GIOCO. Codificatore e decodificatore sono in posizione affiancata. In mezzo ai due banchi / bambini si vede chiaramente lo schermo.

Figura 9 SECONDA POSIZIONE DI GIOCO. Codificatore e decodificatore sono in posizione frontale.

A questo punto si apre la quarta fase del progetto, l'ultima sezione. Con questa quarta espansione, sempre attraverso il gioco dei paesaggi, si è tentato di proporre una conoscenza matematica altra, si è cioè utilizzato lo strumento noto e famigliare del piano allestito a paesaggio per mediare un nuovo concetto: quello del *reticolo geometrico*. Il reticolo infatti può risolvere la necessità di chiarezza e univocità nella descrizione. Gli stessi bambini si sono accorti che durante il momento della dettatura, nonostante abbiano imparato a descrivere il proprio paesaggio con sempre più cura e esattezza, la realizzazione dei due paesaggi (del codificatore e del decodificatore) non coincide

[9] Per problemi di reperibilità dei materiali si è convenuto di utilizzare l'animale "mucca" al posto del "cavallo", i "minios" al posto dei Lego. Nonostante le differenti forme questi oggetti rivestono lo stesso ruolo della prima attività di osservazione e disegno.

totalmente. Si è proceduto quindi nel far emergere con sempre più consapevolezza il bisogno di maggior chiarezza durante la fase di descrizione. Il lessico specifico non è sufficiente, il nuovo strumento è il reticolo, un piano quadrato suddiviso in tanti quadrati uguali realizzati tracciando righe verticali e orizzontali alla stessa distanza l'una dall'altra. Inizialmente si è diviso il piano in quattro parti (due linee che si incrociano a metà), successivamente si sono divisi i due banchi in molte più sezioni. Prima di riprendere nuovamente a giocare su ciascun banco vengono segnati, scegliendo uno dei quattro lati come punto di riferimento iniziale, in posizione orizzontale lettere mentre in posizione verticale numeri, entrambi in progressione crescente da sinistra a destra e dal basso verso l'alto. A questo punto altre tre coppie giocano nuovamente: ora nel descrivere il paesaggio, per posizionare ogni singolo elemento, il codificatore nomina una coppia alfanumerica formata da una lettera e un numero[10]. Nel togliere lo schermo i bambini si accorgono che questa volta i due paesaggi sono decisamente uguali. In chiusura all'intera attività progettuale, sono quindi seguiti un'ulteriore e conclusiva discussione matematica, e, per fissare maggiormente i concetti, un breve momento nel quale i bambini hanno svolto qualche esercizio sul reticolo sul quaderno, (è importante lasciare traccia e memoria delle attività svolte in classe anche sui quadernoni personali, questo anche per dare testimonianza alle famiglie).

Figura 10 IL PIANO RETICOLATO. Una possibile evoluzione del gioco dei paesaggi è transitare dal piano "pulito" al piano reticolato[11].

Figura 11 UNA NUOVA PARTITA. Per descrivere localizzare più correttamente la posizione di un elemento oltre alle "parole dello spazio" ora i bambini hanno a disposizione uno strumento ancora più efficace: una coppia alfanumerica indica il punto esatto di quello specifico oggetto.

Figura 12 dal piano del tavolo a quello della lavagna: ora giochiamo a battaglia navale!

[10] L'insegnante nel tracciare le linee sui banchi, spiega ai bambini che ciascun quadrato (formato dall'incrocio delle linee) ha un nome proprio, un nome specifico formato da una lettera e un numero. Proprio quelle lettere e quei numeri segnati, rispettivamente, sui lati orizzontale e verticale.

[11] Il reticolo è stato realizzato con strisce di scotch colorato e attaccando bigliettini con lettere e numeri. I bambini hanno contribuito alla preparazione di questo nuovo piano.

È possibile affermare come le molteplici *discussioni matematiche*, importante strumento didattico, condotte durante l'intero percorso del progetto abbiano portato i bambini ad acquisire maggior consapevolezza e fiducia nelle proprie conoscenze - anche lessicali. In questo percorso le insegnanti infatti hanno sempre cercato di dare la parola a tutti, evitando di far intervenire gli alunni più esuberanti e meno timidi. Anche chi proponeva idee già emerse dagli amici, ripetendo in parte qualcosa di già sentito, doveva essere ascoltato per trovare il suo spazio all'interno della discussione e della classe. Soprattutto all'interno di un gioco di comunicazione ogni voce infatti ha il suo valore, così come ogni bambino, anche colui che necessità di maggiori cure e attenzioni, va rispettato e ascoltato.
Dopo aver osservato a più livelli le competenze e le conoscenze acquisite dai bambini, ma soprattutto il percorso che li ha condotti a tali risultati, è possibile affermare che non abbiano più grosse difficoltà con la rappresentazione verbale: quasi tutti infatti sono in grado di rappresentare verbalmente ciò che avevano osservato dalla propria posizione[12] (qualche insicurezza è ancora presente, ma il lessico si sta facendo sempre più preciso e vario, sono in grado di descrivere le posizioni e le relazioni tra gli oggetti nello spazio fisico). Saper rappresentare verbalmente è funzionale alla messa in ordine delle immagini richiamate dalla memoria. La maggior difficoltà invece è stata forse nell'attività precedente alla descrizione, quella del disegnare. La rappresentazione grafica su foglio (supporto bidimensionale) infatti presuppone il superamento di alcune problematiche quali il passaggio dalla tridimensionalità degli oggetti che compongono il paesaggio alla bidimensionalità del disegno sul foglio, e il superamento del conflitto legato alla profondità. Se la rappresentazione verbale non ha suscitato grosse difficoltà (se non nell'astrazione[13] dello schermo a specchio per creare due paesaggi speculari e cioè uguali), quella grafica invece non è stata affatto scontata e ha costituito una grossa sfida intellettuale per il bambino. I bambini infatti disegnano così: adattano il disegno in relazione al primo elemento rappresentato; rappresentano oggetti presenti ma che dalla postazione specifica non si vedono; tracciano elementi che notano solo parzialmente; adattano il disegno per disegnare tutto, anche ciò che non si vede o si vede parzialmente; disegnano dove hanno spazio sul foglio; come sanno fare seguendo il loro gusto (stereotipie). L'enorme salto cognitivo risiede nel saper scindere lo *spazio come è*, indipendentemente dal punto di vista - l'intero paesaggio con tutti gli elementi costitutivi, dallo *spazio come viene visto* – il paesaggio esattamente come si vede dal banco in cui è seduto il bambino. Partendo da questa riflessione quindi è facile comprendere gli "*errori*" di sovrapposizione o aggiunta di più elementi all'interno dello stesso oggetto: il bambino ancora non è in grado di tener sotto controllo il rapporto tra le conoscenze che ha dell'oggetto da rappresentare e ciò che vede effettivamente. Inoltre per lui è altrettanto complesso scegliere (in tal caso la scelta del punto di vista è stata bypassata facendo sedere i bambini in quadrato attorno al banco centrale) e mantenere un unico punto di vista, ecco quindi che tende a sovrapporre diversi punti di vista. Compito dell'insegnante deve quindi essere quello di educare l'alunno a disciplinare la sua immaginazione, ma anche il rapporto tra esperienza visiva e conoscenza (si pensi alle numerose stereotipie). Il pensiero spaziale è, in questo senso, ciò che mette in grado il bambino di operare con immagini che ha costruito a partire dalle proprie esperienze personali agite nello spazio fisico, che però poi riesce a trasformarle anche soltanto nella mente.

[12] Sia nella fase del disegno dal proprio punto di vista, sia in quella del gioco vero e proprio.
[13] Il processo di astrazione è comprensibilmente complesso per l'età di questi bambini, e pertanto non era una competenza da acquisire in questa progettazione, se non in forma di pre-intuizione.

Figura 13 La casa di N. e il suo balcone fiorito.

Figura 14 Il disegno di F. Maestra: - "Il tuo disegno è spostato tutto a sinistra. Perché?". F. – "Ho disegnato prima la casa, poi tutto è venuto di conseguenza".

Figura 15 La macchina di N. Maestra: – "Perché hai disegnato così? La macchinina si vede così?". N.: – "Io vedevo un angolino, ho disegnato anche quello che vedevo lì", (tutto intero anche se ne vedeva solo una parte). M.: - "Hai disegnato la famiglia a sinistra, ma controlla bene nella realtà sono a destra". N.: – "L'ho disegnata dove avevo più spazio".

Figura 16 Le bifore di C. Maestra: - "Tu vedi la montagna?", (in realtà non si vede dal suo P/V), "e le finestre, sono proprio come le hai disegnate?", (ha disegnato delle bifore sotto al balcone, quando in realtà non sono presenti). K.: – "Le ho disegnate perché di fianco alla casa (lo spigolo) non riuscivo a disegnarle", per risolvere il problema, K. ha realizzato una sovrapposizione di elementi: alcuni elementi di una faccia e altri della faccia accanto (visti dallo spigolo).

Inoltre è necessario aggiungere come sia in fase di discussione matematica sia in quella di dettatura / ascolto del paesaggio nel gioco vero e proprio, si sia potuto osservare come la *dimensione intersoggettiva* abbia giocato un ruolo fondamentale, in particolare, nel far emergere e gestire conflitti cognitivi o nel permettere la condivisione e eventuale internalizzazione di nuovi segni di natura spaziale.
Alla luce di tutto ciò e in conclusione di progetto si può affermare che i *diversi linguaggi espressivi* (in particolare quello verbale e grafico) non solo si siano integrati a livello individuale in un

approccio semiotico unitario, ma sono stati lo strumento per una più profonda problematizzazione delle proprie conoscenze e la potenziale costruzione di una conoscenza negoziata e condivisa. Conoscenza che si esplica in una relativa ad una sempre più corretta relazione e gestione spaziale.

Al termine del progetto "*Spazio e figure*", è quindi possibile affermare, come i bambini siano giunti alla piena padronanza dello spazio, del movimento all'interno di esso, ma soprattutto si può notare come essi possiedano, con una certa consapevolezza, il lessico necessario per poterne parlare, per poterlo descrivere senza ambiguità ed errore. Il percorso laboratoriale intrapreso ha permesso di giungere a tali obiettivi attraverso un graduale percorso di avvicinamento, sfruttando le curiosità e le necessità che di volta in volta scaturivano nella e dalla classe.
In quest'ottica si ritiene che il progetto abbia pienamente risposto e colto nel segno i principi metodologici che contraddistinguono un'efficace e inclusiva azione formativa, proprio come sono suggeriti anche dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo* del 2012[14]. Di seguito si riportano alcuni di questi principi metodologici riletti alla luce dell'attività progettuale presentata.

- *Favorire l'esplorazione e la scoperta. Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio*. Laboratorio non è solamente un luogo fisico altro dalla propria classe, ma una categoria, uno spazio prima di tutto mentale. Una dimensione nella quale procedere attraverso il dialogo, la conoscenza reciproca, il far domande e il porgere risposte, l'operare e l'agire in prima persona. Tutto questo all'interno del gruppo avviene in forma naturale e spontanea (ovviamente se educata e allenata!). E a ben pensare questo è proprio il modo di procedere e agire dei bambini: l'esplorazione e la scoperta guidano il loro processo di crescita e sviluppo. L'adulto non deve interromperlo, ma al contrario deve essere in grado di promuoverlo e valorizzarlo. Attività di brainstorming e discussioni matematiche si inseriscono pienamente in questa dimensione laboratoriale, promuovendo nei bambini un senso di scoperta continuo e un costante slancio proattivo.
- *Incoraggiare l'apprendimento collaborativo*. Promuovere la collaborazione e l'apprendimento tra pari (*peer education*) è un limite che ormai dovrebbe essere valicato da ogni insegnante in grado di abbandonare il porto sicuro di una didattica tradizione (frontale?) per affrontare un mare aperto e insidioso. È una prospettiva sicuramente diversa, ma in grado di lanciare verso sfide sempre più alte. La proposta del Gioco del paesaggio ha pienamente risposto a tale necessità.
- *Attuare interventi adeguati nei riguardi delle diversità*. Le attività, condotte a macro gruppi attraverso discussioni o a coppie all'interno del gioco, promuovono e proteggono la differenza e l'integrazione della diversità. Una diversità che non si esplica solo nella provenienza o nella disabilità, ma anche nel differente livello di competenze acquisite, nel disagio sociale e culturale, nel genere. Lasciare ai bambini il giusto spazio d'espressione personale ha permesso di scorgere le molteplici sfaccettature che ciascuno di loro possiede.
- *Promuovere la consapevolezza del proprio modo di apprendere*. Questo forse è il principio metodologico più alto e complesso, perché richiede di procedere per meta-cognizione, e invita il bambino ad entrare in dinamiche poco conosciute e frequentate. Tuttavia, attraverso una buona guida da parte dell'insegnante, l'alunno potrebbe iniziare a familiarizzare sul suo e altrui modo di apprendere proprio attraverso la collaborazione e la partecipazione attiva all'interno di gruppi di lavoro, o la pratica della discussione come strumento di scavo per raggiungere sempre maggior consapevolezza e conoscenza di sé. L'insegnante infatti non dovrebbe vedere questa attività come un momento inutile e di perdita di tempo, ma al contrario come profonda opportunità di crescita e arricchimento dei propri alunni.

[14] Cfr. MINISTERO DELL'ISTRUZIONE DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA, 2012, Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'Istruzione, pp. 26-27.

Bibliografia

- A.A.V.V., settembre 2012, *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, Ministero dell'Istruzione dell'Università' e della Ricerca.
- BARBIERI S., MASCHIETTO M. & SCORCIONI F., 2015, *Costruzioni con riga e compasso: approccio alla geometria piana*. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento. Incontri con la matematica* n.29, 119-120. Bologna: Pitagora Editrice.
- BARTOLINI BUSSI M. G. (2008), *Matematica: i numeri e lo spazio*, Parma: Spaggiari, Edizione Junior.
- BARTOLINI BUSSI M.G., BONI M. e FERRI F., 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la Discussione Matematica*, Comune di Modena, Centro Documentazione Educativa.
- FALCADE R. e STROZZI P., 2008, *Il gioco dei paesagg*i, supplemento n°1 in *Bambini*, a n°11 dicembre, Bergamo: Edizione Junior.

Sitografia

- A.A.V.V., Sito dell'Istituto Comprensivo di Castelfranco Emilia, http://www.scuolemarconi.it/
- Gruppo di Ricerca delle Macchine Matematica (GdRMM), Ricerca azione sulle Macchine Matematiche – laboratorio di Matematica, http://www.scuolemarconi.it/gdrsmm-2017-sintesi/
- Geogiocando: insegnamento e apprendimento della matematica attraverso una metodologia laboratoriale https://sites.google.com/site/geomlabo/home/progetti/geogiocando
- Bottega Rinascimentale: ricerca, sperimentazione e divulgazione di nuove metodologie per un'efficace didattica della scienza https://bottegamatematica.wordpress.com/

FLIPPED LEARNING E MOTIVAZIONE IN MATEMATICA: POSSIBILI CONNESSIONI E IMPLICAZIONI DIDATTICHE

Elena LAZZARI[1]
[1] *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Ferrara (FE)*

Riassunto

Nel presente contributo verranno messe in evidenza alcune delle relazioni che intercorrono tra il flipped learning, metodologia didattica innovativa di ampia diffusione, e i fattori motivazionali, componenti della sfera affettiva che hanno una notevole influenza sull'apprendimento in matematica. Da una breve analisi teorica emergerà la possibilità di modificare la motivazione degli studenti mediante l'utilizzo della metodologia considerata. Si mostrerà come tale ipotesi sembra essere sostenuta dalle testimonianze derivate da alcune prime esperienze in scuole secondarie di secondo grado.

Introduzione

Uno degli obiettivi che un docente dovrebbe porsi è quello di stimolare i giovani ad apprendere, traguardo non facile da raggiungere considerando che al progredire del grado scolare la loro motivazione tende a diminuire, in particolare nell'ambito matematico (Middleton e Spain, 1999). Diversi studi hanno dimostrato che la pratica didattica utilizzata in classe può modificare la motivazione degli studenti (e.g. Pellerey e Orio, 1996), anche nella materia qui contemplata (Hannula, 2016). Per tale ragione potrebbe essere estremamente vantaggioso cercare di determinare particolari condizioni in cui la motivazione venga sviluppata e sostenuta. Come si leggerà nel seguito, il *flipped learning* sembra possedere molte delle caratteristiche funzionali all'individuazione di queste condizioni. Prima verranno presentate brevemente la metodologia didattica presa in esame e alcune delle teorie più importanti che trattano la motivazione ad apprendere, così da fornire le informazioni necessarie a comprendere le osservazioni che si proporranno. Si concluderà con diverse riflessioni sul materiale narrativo raccolto da alcune prime sperimentazioni svolte in scuole secondarie di secondo grado. L'obiettivo è quello di verificare se dalle testimoniante degli studenti emergono certi benefici - tra quelli che verranno esposti - a livello motivazionale.

La metodologia

Il *flipped learning* è una metodologia didattica di stampo costruttivista che significa letteralmente *apprendimento capovolto*. In effetti ciò che avviene è un'inversione dei due momenti cardine del modello educativo tradizionale: la trasmissione passiva delle nozioni da parte dell'insegnante e lo studio individuale dell'alunno. Quel che si ottiene è una prima fase in cui gli allievi creano attivamente la propria conoscenza e un secondo momento di ristrutturazione dei contenuti sostenuta dal docente (Vastarella, 2016).

Un elemento fondamentale è quello della *sfida,* che ha lo scopo di stimolare e giustificare l'introduzione di nuovi argomenti. Secondo Guy Brousseau (1986) infatti, non è possibile per uno studente costruire conoscenza significativa senza un reale interesse e coinvolgimento in essa. Ne deriva un ciclo di apprendimento suddiviso in tre fasi (Cecchinato e Papa, 2016). La prima consiste nel *lancio della sfida*, momento in cui vengono proposti stimoli con l'obiettivo di attivare negli studenti il desiderio di conoscenza di uno specifico argomento. Per l'insegnante si tratta spesso di

problematizzare un tema da sviluppare nella fase successiva, la *conduzione della sfida*. Qui gli alunni dovrebbero sentirsi spinti a operare come "piccoli ricercatori" guidati dall'insegnate, pronti a risolvere problemi e dedurre nuovi risultati. In questa occasione vengono sfruttate strategie di apprendimento attivo come l'apprendimento tra pari o per ricerca[15]. L'ultimo momento è la *chiusura della sfida*, in cui grazie a una discussione collettiva guidata dal docente si giunge a definire e consolidare gli argomenti obiettivo del percorso. Il fulcro dell'ultima fase risiede nella riflessione sui processi e sulle strategie utilizzate per giungere alla soluzione, con lo scopo di sviluppare abilità e competenze trasversali e specifiche della materia. L'attenzione che veniva posta sulle conoscenze che un alunno doveva acquisire si sposta ora in direzione delle competenze, con conseguente modifica del ruolo del docente e della tipologia di valutazione.
L'insegnante diventa un facilitatore dei processi di apprendimento, passando da "sage on the stage" a "guide on the side" (King, 1993). Abbandonando l'idea di poter trasferire agli studenti i contenuti disciplinari così come da lui appresi, il docente intraprende un percorso che permette ad ogni allievo di ricostruirli attivamente. Ciò rende più facile anche l'attuazione di una didattica personalizzata, adattando le richieste e le modalità alle caratteristiche e capacità di ogni alunno. Fondamentale diviene anche il ruolo della valutazione, non più classificatoria con lo scopo di certificare un determinato risultato, ma formativa con il fine di promuovere e indirizzare l'apprendimento. Questo tipo di valutazione diventa di primaria importanza: fornisce *feedback* frequenti e tempestivi che direzionano gli allievi nel loro percorso. Si predilige anche una valutazione partecipativa che renda più comprensibili e condivisibili gli obiettivi didattici del docente da parte della classe (Cecchinato e Papa, 2016).

La motivazione

La motivazione è un costrutto che nasce all'interno di teorie psicologiche generali con lo scopo di interpretare e comprendere le ragioni dei comportamenti di diversi soggetti (Ajello, 1999). I primi studi applicati alla matematica cominciarono a svilupparsi durante il primo decennio del ventesimo secolo (Middleton, 2014) e oggi sono considerate parte di un più ampio filone di ricerca in didattica della matematica: l'*affect*.
Gli approcci teorici al costrutto della motivazione sono innumerevoli e ognuno ne mette in evidenza un aspetto diverso. Una classica dicotomia, anche se i confini con il tempo sono diventati sempre più sfumati, è quella tra motivazione intrinseca ed estrinseca. La prima ha luogo ogni volta che si sceglie di affrontare un compito solo per se stessi ed è in correlazione positiva con il rendimento scolastico[16] (Hidi, 1990), soprattutto in matematica (Middleton e Spain, 1999). La seconda si verifica quando si svolge un'attività con finalità esterne; ciò diventa sempre più frequente all'aumentare dell'età e del livello scolare dei soggetti (Harter, 1992). Dalle ricerche sulla motivazione intrinseca sono emerse diverse tipologie di quest'ultima, alcune delle quali sono: la curiosità epistemica, che si riferisce al bisogno di conoscere, la motivazione di *effectance*, che risponde al bisogno di sentirsi competenti, l'autodeterminazione, che consiste nella libera scelta di affrontare o meno un compito, e infine l'interesse. Una delle tante teorie che si riferisce alla motivazione estrinseca è quella del rinforzo, secondo cui un soggetto apprende solo se incentivato da premi e punizioni. Tali idee sono tutt'altro che condivise attualmente, ma sono state necessarie per giungere ad una definizione di buono e cattivo rinforzo. Una contrapposizione quasi sovrapponibile alla precedente, ma legata a studi più recenti, è quella tra obiettivi di padronanza e di

[15] Con il termine apprendimento per ricerca si racchiudono numerose metodologie e tecniche didattiche che stimolano gli studenti a risolvere compiti e problemi attraverso processi esplorativi o analisi critiche di dati fornitegli o ricavati (Haq, 2017). Con il termine apprendimento tra pari si considerano una serie di metodologie e tecniche didattiche in cui l'apprendimento non è individualistico ma collaborativo o cooperativo, grazie alla suddivisione della classe in piccoli gruppi (Comoglio, 1996).
[16] Non solo, è stato dimostrato anche che la motivazione intrinseca favorisce il benessere psicofisico e fisico degli studenti (Miquelon e Vallerand, 2008).

prestazione: nel primo caso, più funzionale all'apprendimento, lo scopo è di acquisire nuove competenze e riuscire a padroneggiare il compito, nel secondo il fine è evitare giudizi negativi o ottenere approvazione[17] (Dweck e Legget, 1988). Si è specificato che la sovrapposizione è in realtà parziale in quanto le differenze tra le due tipologie di obiettivi sono molto più profonde rispetto a quelle tra motivazione intrinseca ed estrinseca, avendo importanti riflessi anche su aspetti emotivi e strategici (De Beni e Moè, 2000). Ad esempio chi ha obiettivi di padronanza in genere crede che l'intelligenza possa essere modificata in seguito a particolari stimoli - possiede quindi una teoria dell'intelligenza incrementale - al contrario di chi ha obiettivi di prestazione a cui è solitamente associata una visione dell'intelligenza come quantità fissa - la teoria dell'intelligenza come entità[18].

Considerazioni teoriche

Dalla comparazione della letteratura esistente sembra vi siano vari punti di contatto tra le diverse ricerche sulla motivazione e il *flipped learning*. Vediamone alcuni nel seguito.
Curiosità epistemica. Uno degli autori che ha dato maggiori contributi al filone di ricerca sulla curiosità epistemica è Berlyne (1971). Egli afferma che l'ambiente, e in particolare le proprietà degli stimoli che questo può offrire - novità, complessità e incongruenza con le vecchie conoscenze - ricopre un ruolo fondamentale negli studi sulla curiosità. Tali elementi possono generare un conflitto interno originando una specifica motivazione che rispondere al bisogno di ottenere ulteriori informazioni per superare l'incertezza. Sotto questo aspetto la teoria trova una perfetta corrispondenza con l'idea di sfida che propone l'apprendimento capovolto. La prima fase del ciclo ha infatti lo scopo di fornire stimoli in grado di catturare l'attenzione degli studenti mediante la proposta di problemi reali, ricerche personali, discussioni controverse, analisi di casi e realizzazioni di progetti. Il tentativo è sempre quello di creare collegamenti con la quotidianità dei giovani e di usare risorse digitali e tecnologiche ove possibile: maggiore è la vicinanza tra l'ambiente scolastico e quello del mondo reale, maggiori saranno gli stimoli offerti dal contesto educativo. Di sostanziale importanza è riuscire a realizzare la *sorpresa ottimale* (Stipek, 1996), ossia determinare un livello medio di incongruenza o di intensità della stimolazione. Se fosse troppo basso si rischierebbe di provocare noia, se invece fosse eccessivamente alto potrebbero scaturire ansia e scoraggiamento. Su questo punto si soffermano lungamente anche gli studiosi della metodologia da noi considerata. Calibrare la difficoltà in base alle capacità degli studenti è un elemento chiave di ogni sfida ben progettata, significa inserire lo studente in quella che Vygotskij (1934) chiama *zona di sviluppo prossimale*.
Teoria del rinforzo. Fra i diversi lavori che si inseriscono all'interno della teoria del rinforzo, di grande interesse per i nostri scopi è quello di Brophy (1981), Schloss e Smith (1994), che delineano le caratteristiche di un buono e cattivo rinforzo. Due delle principali qualità di un buon rinforzo sono la sua vicinanza temporale al comportamento da rinforzare e l'orientamento verso uno specifico aspetto di quest'ultimo. Tali elementi sono gli stessi che si trovano alla base della valutazione formativa promossa dal *flipped learning*. Viene infatti consigliato di restituire *feedback* frequenti e tempestivi - che rispondano alla richiesta di prossimità - sotto forma di consigli piuttosto che di giudizi, permettendo agli studenti di comprendere nel dettaglio i propri errori, effetto che un semplice voto o un giudizio generale non può produrre. In questo modo non si incorre nel rischio di sottolineare il compiacimento degli insegnanti piuttosto che l'impegno dell'allievo - vista la

[17] Anche la motivazione estrinseca o gli obiettivi di prestazione possono essere funzionali all'apprendimento in determinate circostanze. Ci si riferisce a quelle situazioni in cui lo studente desidera mostrarsi capace e mettere in risalto le proprie abilità. A differenza della motivazione intrinseca o degli obiettivi di padronanza però non sempre viene associato al benessere psicofisico del soggetto.
[18] Con la terminologia "teoria dell'intelligenza" si intendono tutte quelle teorie che trattano le possibili interpretazioni di intelligenza. Si distingue tra teorie esplicite - che fanno riferimento ai risultati che emergono da test dell'intelligenza standardizzati - e implicite - ossia come l'intelligenza viene interpretata dalle singole persone. Quest'ultima può essere ulteriormente suddivisa secondo due filoni: la teoria dell'intelligenza come entità e la teoria dell'intelligenza incrementale.

specificità della valutazione focalizzata esclusivamente sul lavoro dello studente - né di sostenere un'atmosfera competitiva, entrambe peculiarità di un cattivo rinforzo.
Motivazione di *effectance*. Una spiegazione alternativa al bisogno di controllare e padroneggiare il proprio ambiente - oltre la curiosità epistemica - è data dalla motivazione di *effectance*. Harter (1978) è una ricercatrice che ha studiato questo tipo di motivazione in dipendenza della presenza/assenza di rinforzi da parte degli adulti: è emerso che quando il soggetto è supportato da rinforzi positivi tende a sviluppare un sistema di autoricompensa che lo renderà sempre meno dipendente dall'approvazione esterna e maggiormente orientato verso obiettivi di padronanza. La motivazione di *effectance* continua così progressivamente a crescere. L'apprendimento capovolto si può dire essere a tutti gli effetti un modello educativo che permette di sostenere questo circolo virtuoso; come già osservato infatti fornisce agli studenti prevalentemente rinforzi positivi grazie al tipo di valutazione che utilizza.
Un altro punto importante della ricerca di Harter (1992) è lo studio delle ragioni che portano ad un progressivo passaggio da motivazione intrinseca a estrinseca nell'avanzamento del grado scolare all'interno di un modello educativo tradizionale. Uno dei fattori che incide maggiormente è la valutazione del docente focalizzata sempre più sui prodotti, trasformandosi in impersonale e "oggettiva"[19], che spesso porta al confronto tra gli allievi e alla competitività. La conseguenza non può che essere uno spostamento dell'attenzione dall'attività di apprendimento al voto e alla dimostrazione delle proprie abilità. La stessa Harter suggerisce di coinvolgere gli studenti in attività sfidanti a livello ottimale di cui condividano obiettivo e significato. Essendo il concetto di sfida centrale nella didattica capovolta questa metodologia sembra seguire diligentemente i consigli della studiosa. Vista la possibilità di individualizzare la didattica mediante l'assegnazione personalizzata di "compiti a casa" e la creazione di gruppi per livello durante gli incontri in classe, si è anche in grado di proporre ad ogni studente attività adeguatamente sfidanti. In aggiunta con il *flipped learning* si sta cercando di riportare il fulcro della valutazione sui processi piuttosto che sui prodotti e di conseguenza spostare l'obiettivo degli allievi sulle strategie di apprendimento invece che sui voti. È possibile inoltre ridurre la componente competitiva grazie all'utilizzo di strategie didattiche cooperative e collaborative. Allo stesso modo si sta lavorando sul falso mito dell'oggettività, sfruttando rubriche valutative non rigide e condivise con gli alunni.
Teoria dell'Autodeterminazione. Deci e Ryan (1985) sono i padri della teoria dell'autodeterminazione. Essi sostengono che l'ambiente in cui il soggetto si trova può ostacolare o promuovere *comportamenti autodeterminati*[20] e ciò dipende dalla soddisfazione dei tre bisogni psicologici fondamentali: competenza, autonomia e relazionalità. Senza ribadire nuovamente come l'apprendimento capovolto sostenga il bisogno di competenza offrendo attività adeguatamente sfidanti in cui è possibile mobilitare e sviluppare nuove abilità, analizziamo quali caratteristiche riescono a supportare il bisogno di autonomia. In generale, essendo una metodologia didattica attiva, vengono promossi l'iniziativa personale, l'assunzione di responsabilità, la presa di consapevolezza, ecc.; in una parola appunto, l'autonomia. Entrando nel dettaglio: la variazione del ruolo del docente da divulgatore a facilitatore dei processi di apprendimento dello studente consente agli allievi di agire in modo più indipendente, assumendosi la responsabilità del proprio apprendimento. Inoltre la possibilità di studiare i prerequisiti a casa mediante video o altro materiale permette agli studenti di organizzare i propri ritmi e tempi di studio.
Altrettanto sostenuto è il bisogno di essere in relazioni con gli altri. L'utilizzo dell'apprendimento tra pari, una delle strategie didattiche più utilizzate nel *flipped learning,* favorisce l'interazione tra compagni, la cooperazione, la collaborazione, il senso di appartenenza, la condivisione di obiettivi, l'ascolto, la comunicazione, ecc. soddisfacendo quindi il bisogno preso in considerazione. Non solo, il nuovo ruolo dell'insegnante gli permette di lavorare al fianco di ogni alunno, creando e

[19] La valutazione oggettiva è un falso mito. Il processo valutativo si fonda su una rappresentazione della realtà da parte di chi valuta, sia nel momento rilevativo, sia nel momento del giudizio (Castoldi, 2009).
[20] Ossia comportamenti completamente volontari che producono nel soggetto una conferma del proprio senso di sé, in contrapposizione con i *comportamenti controllati*, cioè dominati dalla volontà altrui.

potenziando la relazione educativa, e di personalizzare maggiormente i percorsi didattici. Viene così trasmesso coinvolgimento interpersonale e attenzione al singolo che sosterrà ulteriormente il bisogno di relazionalità anche con il docente (Niemiec e Ryan, 2009). Questa relazione può essere estesa al di fuori dall'aula quando vengono sfruttate piattaforme e-learning che permettono la comunicazione da casa tra studente e studente ma anche tra studente e docente.

Interesse. L'interesse può essere definito come un orientamento relativamente a lungo termine dell'individuo verso un oggetto, un'attività o un'area di conoscenza (Shiefele, 1991). Secondo Krapp, Hidi e Renninger (1992) l'interesse emerge dall'interazione ripetuta di una persona interessata, in un determinato ambiente, a materiale che risulta interessante per le sue caratteristiche. Naturalmente gli aspetti individuali non possono essere controllati dall'esterno, ma agendo su quelli ambientali e sociali si può provare a incrementare l'interesse di un soggetto. Anderson et al. (1987) si sono concentrati sulla determinazione di alcune caratteristiche che possono rendere la situazione o il materiale più interessante: il fattore novità, che suscita curiosità, la chiarezza, che mostra il compito come qualcosa di maggiormente affrontabile e comprensibile, il collegamento con elementi autobiografici, che rende l'attività meglio memorizzabile, e il valore d'immagine.

I quattro elementi elencati possono essere continuamente presenti durante le lezioni *flipped*. Grazie agli stimoli sempre differenti che si riescono a proporre durante il lancio della sfida, il fattore novità potrebbe essere rinnovato ad ogni ciclo di incontri. Inoltre il nuovo ruolo dell'insegnante permette di chiarificare la richiesta del compito studente per studente e di "aggiustare il tiro" tempestivamente accorgendosi immediatamente se il materiale è stato male interpretato. Seguendo i consigli dei ricercatori e inserendo i nuovi argomenti in contesti legati alla quotidianità dei giovani sarà molto più facile creare collegamenti autobiografici. Infine, sfruttando le nuove tecnologie, si possono prediligere stili comunicativi basati sul valore d'immagine, in particolare utilizzando i video, punto di partenza di questa metodologia.

Teoria dell'intelligenza. Il rendimento e il benessere emotivo dell'allievo possono essere influenzati dalla teoria dell'intelligenza di riferimento. Infatti ad una teoria dell'intelligenza incrementale sono spesso associati obiettivi di padronanza e una motivazione tendenzialmente intrinseca. Diversi studi sperimentali hanno mostrato come l'ambiente possa modificare la visione dell'intelligenza di un soggetto (e.g. Good, Rattan e Dweck, 2012). Quando viene valorizzato l'impegno e la ricerca di strategie, quando viene ridotto il timore di fallire e il giudizio degli altri, si creano situazioni favorevoli alla formazione di teorie dell'intelligenza incrementali (Elliott e Dweck, 1988). Si potrebbe ipotizzare di ottenere tali risultati inserendo gli studenti in ambienti educativi collaborativi che puntano alla riduzione della competitività. Ambienti in cui oltre alla qualità delle singole prestazioni vengono valutati anche i processi, spostando l'attenzione dalla correttezza del risultato alla strategia di soluzione e ai progressi, mettendo così in risalto l'importanza dell'impegno (Cecchinato e Papa, 2016). L'utilizzo dell'apprendimento capovolto, che possiede tutte le caratteristiche appena elencate, potrebbe allora favorire lo sviluppo negli studenti di teorie dell'intelligenza incrementale.

Obiettivi di apprendimento. Gli obiettivi di apprendimento sono un insieme complesso e organizzato di credenze che dirigono quest'ultimo e rispetto al quale viene valuta la prestazione (Pintrich, 2000). Gli obiettivi di padronanza possono essere considerati parzialmente sovrapponibili con la motivazione intrinseca, e risentono fortemente della teoria dell'intelligenza incrementale. Ciò premesso, si può dedurre dai paragrafi precedenti come il *flipped learning* possa essere un ambiente che sostiene lo sviluppo di questo tipo di obiettivi.

Esperienza didattica e considerazioni teoriche

Attualmente è in corso un progetto di ricerca in diverse classi terze e quarte di scuole secondarie di secondo grado di Ferrara e provincia, con lo scopo di verificare le ipotesi teoriche appena esposte. Non è ancora possibile giungere a delle conclusioni, ma potrebbe essere interessante fare alcune

considerazioni intermedie basate sul materiale narrativo raccolto fino ad ora. Il percorso didattico proposto tratta l'argomento delle sezioni coniche ed è della durata indicativa di 16 ore. Gli incontri si svolgono durante le normali ore di lezione - per un periodo di circa due mesi - così da integrare il più possibile il percorso nella quotidianità scolastica degli studenti. La metodologia utilizzata è quella dell'apprendimento capovolto e gli stimoli scelti per ogni conica riguardano alcune curiosità su queste curve legate alla legge di riflessione. Ad esempio, è stato scelto il funzionamento dello specchio ustorio per l'introduzione della parabola, il fenomeno acustico caratteristico della Chiesa di S. Andrea al Quirinale a Roma per la trattazione dell'elisse, il fenomeno ottico relativo al colonnato della Piazza di S. Pietro a Roma per lo studio della circonferenza e la configurazione ottica del telescopio di *Cassegrain* per l'analisi dell'iperbole. Da tali stimoli comincia un percorso di scoperta più ampio per i "piccoli ricercatori", con lo scopo di ricavare le equazioni analitiche e/o caratteristiche grafiche delle curve citate. Come previsto dal *flipped learning* vengono sfruttate strategie didattiche attive, in particolare l'apprendimento tra pari e per ricerca, con una presenza molto forte della valutazione formativa - correggendo e commentando tutti gli elaborati degli studenti, anche quelli assegnati per casa. In tal modo la comunicazione tra allievo e docente risulta accentuata; inoltre grazie all'utilizzo della posta elettronica questa può essere ampliata anche al di fuori dell'aula. Al termine degli incontri, in seguito alla verifica sommativa, viene richiesto agli studenti di scrivere un tema sull'esperienza vissuta specificando i lati maggiormente apprezzati[21].
Sul materiale narrativo ottenuto in tre differenti classi quarte, per un totale di 76 studenti, svolgiamo diverse considerazioni. Cominciamo con alcuni stralci dei temi di tre studentesse, che sembrano far trasparire un aumento del livello di interesse grazie ai collegamenti con il mondo reale e l'uso di risorse digitali - quindi riferimenti autobiografici e valore di immagine - stimolando la loro curiosità.
Alice: *"Non mi sento molto in contatto con il mondo della matematica, ma affiancare gli argomenti trattati ad esempi reali (la piazza di S. Pietro, la basilica di S. Andrea) mi hanno aiutato ad appassionarmi un po' di più al lavoro (amo l'arte e il fatto che vengano applicate ad essa leggi che la regolano la equilibrano che talvolta si intersecano con la materia della matematica)."*
Petra: *"Ho apprezzato i video esplicativi dove venivano illustrati i comportamenti delle sezioni coniche al variare dei coefficienti in quanto trovo che siano più efficaci rispetto a una semplice spiegazione perché permettono di osservare e memorizzare meglio le caratteristiche della sezione conica considerata."*
Martina: *"Durante queste lezioni ho provato molto interesse e molta curiosità, ho capito molto meglio gli argomenti, ma ho ancora dei dubbi."*
Alcuni studenti sembrano notare e apprezzare anche il livello medio-alto scelto per la sfida, come Giulia, che scrive: *"Durante l'attività mi sono sentita alla portata di quello che si faceva, contrariamente a come succede a volte con le lezioni tradizionali"*.
Proprio questa sfida nei confronti di se stessi sembra aver stimolato la motivazione di *effectance* di diversi allievi.
Thomas: "*Inoltre era molto gratificante giungere ad una conclusione corretta di un esercizio, soprattutto perché frutto dei nostri pensieri, siccome l'obiettivo era quello di arrivare alla soluzione dei problemi in gruppo, senza la spiegazione della prof."*.
Federica: "*Il fatto di scoprire da sola alcuni di questi concetti mi ha portato ad essere più motivata del solito e ad impegnarmi di più nello studio*".
Mirco: "*L'attività in generale mi ha molto motivato rispetto alle lezioni normali soprattutto perché ho dovuto sfruttare ragionamenti logici e razionali, cosa che ho applicato anche durante la verifica finale, un momento durante il quale solitamente applicavo semplicemente i procedimenti che mi sono stati insegnati in classe*".

[21] Riportiamo di seguito la consegna del tema: "*Racconta come hai vissuto l'esperienza del progetto Flipped Math! (Quali sensazioni e quali emozioni hai provato? Com'è stato il tuo rapporto con la matematica? Ti sei sentito motivato? Quanto, come e perché?). Specifica anche quali secondo te sono gli aspetti maggiormente positivi e negativi in questo percorso."*

Le testimonianze prese ad esempio sottolineano infatti come il dover scoprire un determinato risultato da soli - senza l'aiuto del docente - li abbia stimolati durante lo svolgimento delle attività. La *gratificazione* che, come Thomas, altri studenti dichiarano di aver provato per un lavoro svolto sfruttando esclusivamente le proprie capacità, potrebbe essere interpretata come l'autoricompensa che li renderà sempre meno dipendenti dall'approvazione esterna e maggiormente orientati verso obiettivi di padronanza (Harter, 1978). Questo apprezzamento provato per il "fare da soli" crea un ulteriore collegamento con il bisogno di autonomia, considerato nella teoria dell'autodeterminazione di Deci e Ryan (1985). Portiamo come esempio alcune testimonianze dalle quali traspare la presenza costante dell'insegnante come guida a fianco dello studente, anche a distanza e attraverso l'assegnazione di materiale che funge da sostegno dei processi di apprendimento.
Gloria: *"Un altro aspetto positivo di questo progetto, secondo me, è stato il fatto di lavorare a casa fornendosi della posta elettronica e anche dell'appoggio di alcuni video che potevano aiutarci a comprendere meglio gli argomenti trattati: credo che questo metodo di lavoro ci abbia anche aiutato ad acquisire più autonomia."*
Giada: "[…] *anche se questa esperienza non mi ha aiutato molto nella comprensione della matematica, mi ha fatto crescere un po' di più come persona grazie all'organizzazione e alla responsabilità che richiedeva."*
Anche il terzo bisogno psicologico, quello di relazionalità, sembra venire soddisfatto sia dall'utilizzo dell'apprendimento tra pari che dalla presenza costante del docente, come già emerso sopra.
Eva: "[…] *mi sono ritrovata spesso a spiegare alcune cose ai membri del mio gruppo che avevano perso una parte di spiegazione o non avevano capito qualcosa, e questo mi ha fatto piacere perché mi sono sentita "utile" e ascoltata, oltre al fatto che spiegandolo anche io capivo meglio le cose".*
Giada: *"Un aspetto positivo del progetto è il fatto che eravamo molto seguiti, per esempio con la correzione dei compiti volta per volta e di conseguenza lo studio della materia era costante".*
Dalle parole di Giada emerge la percezione di un coinvolgimento interpersonale e un'attenzione individuale dell'insegnante nei loro confronti - reso possibile dal nuovo ruolo di quest'ultimo - che potrebbe essere utile al soddisfacimento del bisogno preso in considerazione. Il medesimo effetto potrebbe avere l'interazione avvenuta tra compagni, la cooperazione, la collaborazione, il senso di appartenenza e la comunicazione espressa da Eva. Proprio l'utilizzo dell'apprendimento tra pari è stato uno dei lati dell'esperienza maggiormente apprezzati.
Federica: *"Un altro aspetto che, sotto il mio punto di vista, è stato molto utile è stato il fatto di lavorare in gruppo. In questo modo tutti avevamo la possibilità di metterci in gioco, per esempio spiegando ai compagni del gruppo alcuni passaggi non capiti e di confrontarsi anche durante lo svolgimento di esercizi in caso di bisogno".*
Valentina: *"Lavorare in gruppo ha reso le lezioni meno pesanti e meno difficili, dato che non si ragionava mai da soli ma sempre con altre persone".*
Come mostrano le precedenti testimonianze il gruppo risulta essere un sostegno per l'apprendimento, fa sentire gli studenti più partecipi - essendo una strategia didattica attiva - e crea un clima di classe più disteso in cui si lavora più volentieri. Il cambiamento dell'atmosfera in classe è stato percepito anche da altri studenti, che dichiarano di aver vissuto questa esperienza con una tranquillità che solitamente non riuscivano a raggiungere durante le ore di lezione e di studio della matematica.
Emma: *"Durante questo percorso il mio rapporto con la matematica è stato simile a quello che ho in classe normalmente durante le ore di lezione tradizionale, ma ammetto che durante questo tipo di attività mi sento più tranquilla ed a mio agio e non ho avuto problemi a esporre gli esercizi o le eventuali difficoltà riscontrate."*
Iulia: *"Riuscire a capire la matematica così facilmente e velocemente è stata una sorpresa per me, dopo le medie è sempre stata un fardello e una preoccupazione che portava ad ansie non leggere. Durante l'attività arrivavo a lezione con il cuore tranquillo, senza la preoccupazione per la verifica*

che si avvicinava e la consapevolezza di aver capito e eseguito i compiti in maniera più o meno completa. A questo proposito è stato di grande aiuto poter far controllare i propri compiti, da un lato per poter capire meglio gli errori, e dall'altro per placare la pigrizia che porta a volte a non farli. Anche i commenti ricevuti mi hanno rincuorata dopo molti errori, e resa fiera se invece erano pochi."

Dalle parole di Iulia emerge un altro fatto: a favorire un clima di classe più sereno ha probabilmente inciso anche il tipo di valutazione promossa dal *flipped learning*. Quest'ultima avendo l'obiettivo di direzionare il percorso didattico degli studenti, piuttosto che giudicarlo, ha diminuito la tensione all'interno delle classi[22] ed è stata considerata un valore aggiunto ai fini dell'apprendimento.

Benedetta: *"Penso che possa essere una maniera per imparare senza avere la paura del voto, sollecitando dunque la partecipazione attiva della classe."*

Ginevra: *"Un altro aspetto positivo è stata la correzione dei compiti svolti a casa, i quali venivano corretti con alcune spiegazioni che ho trovato molto utili."*

Il benessere emotivo dello studente può essere influenzato anche dalla teoria dell'intelligenza di riferimento, e leggendo alcune parti dei temi si potrebbe ipotizzare che questa esperienza ha dato loro maggior sicurezza nelle proprie potenzialità e ha sostenuto lo sviluppo di teorie dell'intelligenza incrementali.

Andra: "[…] *pensavo di essere davvero una troglodita della matematica ma in realtà non è assolutamente così…anche se io e i numeri non andiamo tanto d'accordo ho capito che non ha così tanto peso per poter comprendere la materia."*

Valentina: "[…] *partire da una semplice formula e far determinare a noi le varie equazioni e formule mi ha abituata a ragionare e mi ha motivata molto. Infatti riuscire ogni volta a trovare equazioni, risposte e soluzioni mi ha dato sicurezza e soddisfazione e mi ha fatto capire che se ragiono e mi concentro io posso capire la matematica".*

Grazie al percorso svolto Valentina si è resa conto che *se ragiona e si concentra*, ossia se si impegna e sfrutta le giuste strategie di apprendimento, può raggiungere gli obiettivi educativi prefissati. Sembra proprio che, come Andra, la teoria dell'intelligenza di riferimento sia diventata quella incrementale.

Conclusioni

Dopo una breve presentazione delle caratteristiche del flipped learning e di alcune delle più importanti teorie della motivazione ad apprendere, sono stati evidenziati differenti punti di contatto che sembrano proporre questa metodologia come una buona candidata a sviluppare e sostenere la motivazione degli studenti, anche in matematica.

L'idea di sfida, caratteristica che contraddistingue la metodologia, pare risponda perfettamente alle richieste di un ambiente che ha l'obiettivo di sviluppare una motivazione di tipo intrinseco. Infatti la condizione necessaria affinché si generi curiosità epistemica, motivazione di *effectance* e interesse in uno studente è proprio quella di inserirlo in situazioni ricche di stimoli e prove da superare. Fondamentale è il livello di difficoltà di queste ultime che secondo le teorie precedentemente citate, così come per la metodologia *flipped*, deve essere ottimale per consentire una canalizzazione dell'attenzione del soggetto - evitando il rischio di scoraggiarlo o annoiarlo. Altro punto in comune è l'utilizzo di strategie didattiche attive che portano ad un aumento del livello di autonomia e responsabilizzazione degli studenti. Una delle più utilizzate è l'apprendimento tra pari, che supporta la creazione di ambienti di lavoro non competitivi. Tali strategie, soddisfacendo i bisogni psicologici fondamentali, portano all'aumento del livello di autodeterminazione. Un ultimo aspetto è quello relativo alla valutazione, che essendo di tipo formativo possiede le caratteristiche che un

[22] Tale tensione è stata messa in evidenza da Gaia nel suo tema, mentre spiegava quali fossero stati per lei i lati negativi dell'esperienza: *"Un altro punto* [negativo]*, è il fatto che molte volte c'era l'ansia di assistere alle lezioni con anche l'insegnante di ruolo, e posso assicurare che la paura di una valutazione negativa (almeno per me) non è poca".*

buon rinforzo dovrebbe avere - specificità e prossimità. La conseguenza è lo spostamento del *focus* dai prodotti ai processi. Viene quindi dato maggior valore alle strategie scelte, ai progressi svolti e allo sforzo perpetuato, stimolando così una maggior valorizzazione dell'impegno. Contesti educativi come quelli appena descritti stimolano l'adesione a teorie dell'intelligenza incrementali e la scelta di obiettivi di padronanza.

Dall'analisi dei temi integrali degli studenti emerge un apprezzamento generale per l'esperienza svolta. Circa la metà degli alunni dichiara di non aver modificato il suo rapporto con la matematica ma percepisce distintamente miglioramenti sotto altri fronti, come ad esempio una maggior motivazione, emozioni positive, un clima in classe rilassato e di sostegno reciproco, una maggior fiducia in se stessi e una diminuzione del livello di ansia e stress. Consapevoli del fatto che per ottenere risultati significativi dall'applicazione di metodologie didattiche attive sarebbero necessari tempi più lunghi (Carletti e Varani, 2005), crediamo che i risultati conseguiti da queste sperimentazioni di soli due mesi siano soddisfacenti, e possano mettere maggiormente in risalto l'importanza della ricerca in questo ambito. Se il flipped learning riuscisse realmente a migliorare la motivazione - come studi sperimentali (e.g. Kaushal, Cheng-Nan, Chun-Yen, 2015) e queste prime esperienze sembrano suggerire - potrebbe essere un utile strumento per l'insegnamento-apprendimento della matematica.

Riferimenti bibliografici

AJELLO A.M., 1999, La motivazione ad apprendere: aspetti teorici, implicazioni educative. In PONTECORVO C., 'Psicologia dell'educazione', Bologna: Il Mulino.

ANDERSON R.C., SHIREY L.L., WILSON P.T. & FIELDING L.G., 1987, Interestingness of children's reading material. In SNOW R.E. & FARR M.J., 'Aptitude, learning and instruction: Cognitive and affective process analysis', Hillsdale: Erlbaum (N.J.)

BERLYNE D.E., 1971, 'Conflitto, attivazione e creatività', Milano: Angeli.

BROPHY J., 1981, Teacher praise: A functional analysis, 'Review of Educational Research', 51, pp. 5-32.

BROUSSEAU G., 1986, Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, 'Recherches en didactique des mathématiques', 7 (2), pp. 33-115.

CARLETTI A., VARANI A., 2005, 'Didattica costruttivista. Dalla teoria alla pratica in classe. Trento: Erickson.

CASTOLDI M, 2009, 'Valutare le competenze. Percorsi e strumenti', Roma: Carocci editore.

CECCHINATO G. & PAPA R., 2016, 'Flipped classroom un nuovo modo di insegnare e apprendere', Novara: UTET.

COMOGLIO M., 1996, Verso una definizione del Cooperative Learning, 'Animazione Sociale', 4.

DECI E. & RYAN R, 1985, 'Intrinsic motivation and self-determination in human behavior', New York: Plenum Press.

DWECK, C.S & LAGGET E.L, 1988, A social cognitive approach to motivation and personality, 'Psychological Review', 95, pp. 256-273.

ELLIOTT E.S. & DWECK C.S., 1988, Goals: An approach to motivation and achievement, 'Journal of Personality and Social Psychology', 54 (1), pp. 5-12.

GOOD C., RATTAN A. & DWECK C.S., 2012, Why do women opt out? Sense of belonging and women's representation in mathematics, 'Journal of Personality and Social Psychology', 102 (4), pp. 700-717.

HANNULA M.C., 2016, Regulating motivation in mathematics, 'Journal of change teachers University-Natural Science Edition', pp. 96-105.

HATER S., 1978, Effectance motivation reconsidered: Toward a developmental model, 'Human Development', 21, pp. 34-64.

HARTER S., 1992, The relationship between perceived competence, affect and motivational orientation within the classroom: Processes and patterns of change. In BOGGIANO A.K & PITTMAN T.S., 'Achievement and motivation: A social-developmental perspective', Cambridge: Cambridge University Press.

HAQ I., 2017, Inquiry-based Learning. In CANTILLON P., WOOD D. & YARDLEY S., ‘ABC of Learning and Teaching’, Hoboken: Wiley (N.J.).
HIDI S., 1990, Interest and its contribution as a mental resource for learning, ‘Review of Educational Research’, 60, pp. 549-350.
KAUSHAL K.B., CHENG-NAN C. & CHUN.YEN C., 2015, The Impact of the Flipped Classroom on Mathematics Concept Learning in High School, ‘Educational Technology & Society’, 19 (3), pp. 134-142.
KING A., 1993, From Sage on the Stage to Guide on the Side, ‘College Teaching’, 41 (1), pp. 30-35.
KRAPP A., HIDI S. & RENNINGER K.A., 1992, Interest, learning and development. In RENNINGER K.A., HIDI S. & KRAPP A., ‘The role of interest in learning and development’, Hillsdale: Erlbaum (N.J.).
MIDDLETON J.A., 2014, Motivation in Mathematics Learning. In LERMAN S., ‘Encyclopedia of Mathematics Education’, Springer.
MIDDLETON, J.A., SPANIAS P.A., 1999, Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalizations, and Criticisms of the Research, ‘Journal of Research in Mathematics Education’, 30 (1), pp. 65-88.
MIQUELON P. & VALLERAND R.J., 2008, Goal motives, well-being, and physical health: An integrative mode, ‘Canadian Psichology’, 49 (3), pp. 241-249.
NIEMIEC C.P. & RYAN R.M, 2009, Autonomy, competence, andrelatedness in the classroom: Applying self-determination theory to educational practice, ‘Theory and Research in Education’, 7 (2), pp. 133-144.
PELLEREY M. & ORIO F., 1996, La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica, ‘ISRE’, 2, pp. 19-36.
PINTRICH P.R., 2000, An achievement goal theory perspective on issues in motivation terminology, theory and research, ‘Contemporary Educational Psychology’, 25, pp.92-104.
SCHIEFELE U., 1991, Interest, learning and motivation, ‘Educational Psychology’, 26, pp. 299-323.
SCHLOSS P. & SMITH M., 1994, ‘Applied behavior analysis in the classroom’, Boston: Allyn&Bacon. (Mass.).
STIPEK D.J., 1996, ‘La motivazione nell’apprendimento scolastico. Fondamenti teorici e orientamenti operativi’, Torino: SEI.
VASTARELLA, S., 2016, Postfazione. In BERGMANN J. & SAMS A., ‘Flip your classroom. La didattica capovolta’, Firenze: Giunti.
VYGOTSKIJ, L.S., 1990, ‘Pensiero e linguaggio’, Bari: Laterza.

GLI “SPAZI COLORE”: UN ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE DI AMBIENTI SCOLASTICI PER LA SPERIMENTAZIONE DIDATTICA AL CIVICO POLO SCOLASTICO “A. MANZONI” A MILANO

Mariagrazia MARCARINI

Università di Bergamo

Il Poster descrive la rivisitazione di alcuni ambienti del Civico Polo Scolastico “A. Manzoni”, situato in Via Grazia Deledda a Milano e rappresenta un esempio di come si possa intervenire con risorse economiche e spazi limitati, in edifici scolastici tradizionali attraverso la creazione degli “Spazi Colore”.

La complessità del Polo “Manzoni” del Comune di Milano presenta una situazione unica a livello nazionale: è un’istituzione pubblica che comprende scuole paritarie e corsi liberi, in fasce orarie uguali e differenziate e, come spesso succede, le differenze possono essere fonte di nuove opportunità per tutti gli studenti. All’interno dello stesso plesso in via Deledda a Milano ci sono importanti scuole paritarie gestite dal Comune di Milano: il Liceo Linguistico Manzoni, il PACLE/ITE Manzoni, il Liceo Linguistico della del Teatro alla Scala e il Civico Centro di Istruzione per l’Adulto e l’Adolescente, oltre ai Corsi di Lingue Serali.

In questo, seppur grande edificio gli spazi sono comunque molto limitati e soprattutto viene svolta una didattica molto tradizionale. L’edificio è organizzato a livello spaziale per rispondere in modo abbastanza evidente a principi didattici molto tradizionali.

La sollecitazione a creare nuovi ambienti di apprendimento da realizzare con un investimento di spesa contenuto è venuta dalla visita che è stata effettuata all’Ørestad Gymnasium di Copenhagen da parte di gruppo di persone composto da docenti e funzionari, guidato dal Direttore dell’Area Servizi Scolastici ed Educativi dell’Assessorato all’Educazione, Dott.ssa Banfi.
Da qui l’idea della progettazione degli “Spazi Colore” da parte della dott.ssa Sassone, Responsabile dell’Ufficio Funzioni Trasversali e Progetti Speciali, e dell’arch. Scevola, Responsabile dell’Unità Rete Scolastica e Logistica, inaugurati il 24 di novembre 2017.
Gli “Spazi Colore” sono tre ambienti ricavati, con un progetto di riconversione, a bassissimo impatto edile, di alcuni spazi denominati “margherita” nell’atrio della scuola, precedentemente adibiti ad uffici, in ambienti flessibili destinati ad accogliere attività didattiche finalizzate a promuovere nuove metodologie didattiche.
Ciascuno spazio può accogliere al massimo circa 16 studenti; sono arredati con tavoli di varie forme, scaffali e cuscinoni per “l’angolo morbido” e sono forniti di wifi, c’è pertanto la possibilità di strutturare diversi *setting* didattici.
Con questa realizzazione, lo studente e i suoi bisogni vengono posti al centro del suo percorso di apprendimento anche alla luce della Legge n. 107 del 2015 e delle indicazioni in materia di edilizia scolastica contenute nelle Linee Guida del MIUR del 2013 e delle proposte dell’INDIRE che hanno

suggerito una nuova visione e nuovi criteri per la progettazione dello spazio e delle dotazioni scolastiche (Sassone, Scevola 2017).
Questi nuovi ambienti possono essere mediatori di apprendimento, perché gli esseri umani sviluppano e acquisiscono conoscenze dalle loro interazioni con l'ambiente, naturale o artificiale e con altre persone; l'ambiente fisico influenza gli studenti, il loro apprendimento e i contenuti che devono essere appresi.
È necessario considerare come l'allievo influenza l'ambiente sociale e come l'ambiente sociale lo stimola o lo forma e come agiscono sugli studenti le influenze degli ambienti fisici (Lippman, 2010, pp. 134-140).
La possibilità di disporre degli "Spazi Colore" è un'opportunità che può far sperimentare agli studenti un modo nuovo di stare a scuola, meno formale e rigido, con ricadute positive in termini didattici e relazionali. Per i docenti diventa possibile sollecitare nuovi itinerari di apprendimento e sviluppare competenze indirizzate all'apprendimento collaborativo, all'autonomia personale e al senso di responsabilità.
L'obiettivo che ha promosso la realizzazione degli "Spazi Colore", è di permettere un cambiamento nell'uso degli spazi scolastici nella pratica quotidiana della scuola, attraverso «un progetto attuabile con impegni di risorse economiche relativamente modeste, [che possa rappresentare] una rilevante opportunità pedagogica [e che, infine,] abbia un fortissimo rapporto con lo sviluppo di nuove esperienze educative centrate sulla responsabilizzazione, sulla partecipazione e sul benessere degli alunni» (Sassone, Scevola, 2017)
I diversi *setting* presenti negli "Spazi colore", sono necessari per promuovere diverse strategie di apprendimento, nelle quali gli studenti acquisiscono conoscenze e competenze.
Attraverso questi ambienti diventa anche possibile ricomporre la frattura tra il fare e il sapere, tra la prassi e la teoria, tra il sapere pratico e sapere teorico che ha portato alla gerarchizzazione delle scuole e dei saperi (Bertagna, 2011, p. 43).

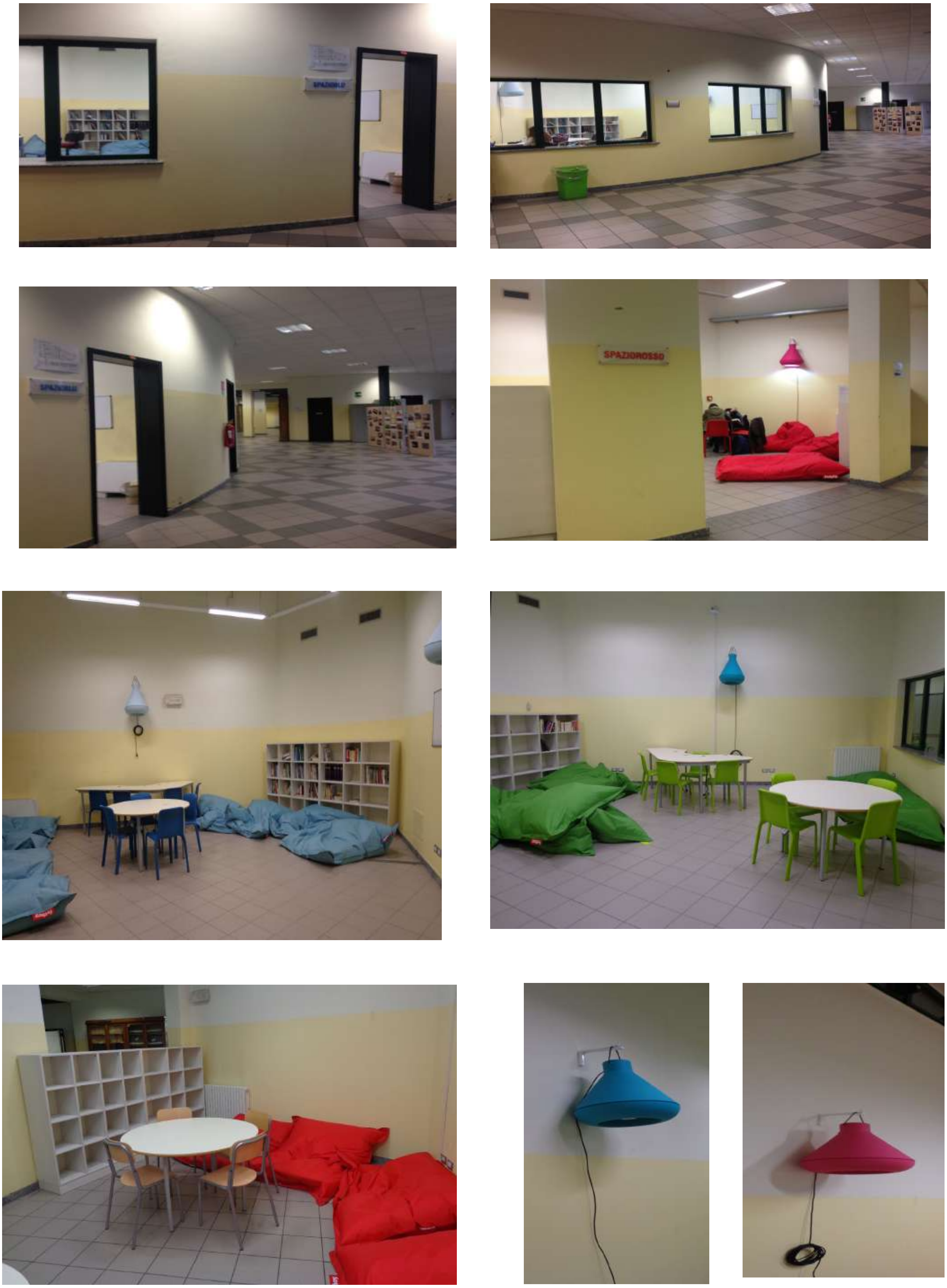


Figura 14 I tre "Spazi colore" realizzati nell'atrio del Polo Manzoni del Comune di Milano in Via Grazia Deledda

Figura 16 Gli spazi prima dell'intervento di riconversione.

BIBLIOGRAFIA

AA.VV. (2016), *La risposta delle Civiche Scuole Paritarie alle direttive europee*, Comune di Milano, Milano.

AIROLDI E ALTRI, (1982), *Manuale di edilizia scolastica*, NIS, Firenze.

BARRET P., ZHANG Y. (2009), *Optimal Learning Spaces*, University of Salford, Salford.

BATENSON G. (2011)[15], *Mente e natura*, Adelphi, Milano.

BERTAGNA G. (2011), *Lavoro e formazione dei giovani*, Editrice La Scuola, Brescia.

BRUNER J. (1961), *Dopo Dewey. Il processo di apprendimento nelle due culture*, Armando Armando Editore, Roma.

COLLINS A. (1993), *Cognitive Apprenticeship and Instructional Technology*, Cambridge, MA.BBN, (Eric Document Reproduction Service N. 331465.

DENT-READ C. and ZUKOW-GOLDRING P. (1997), *Introduction: Ecological Realism, Dynamic Systems Approaches to Development*, in C. DENT-READ, P. ZUKOW-GOLDRING (Eds.), *Evolving Explanation of Development: Ecological Approaches to Organism-Environments Systems*, American Psycological Association, Washington DC.

FIANCHINI M., (2017), *Modelli autorganizzati di miglioramento nell'uso degli ambienti scolastici*, in M. FIANCHINI (Ed.), *Rinnovare le scuole dall'interno. Scenari e strategie di miglioramento delle infrastrutture scolastiche*, Maggioli Editore, Sant'Arcarngelo di Romagna (RN).

HORNE-MARTIN S. (2002), *The classroom environments and its effect on the practice of teacher*, «Journal of Environmental Psychology», n. 221-2, 2002, pp. 139-156.

KEYES C.L.M. (1998), *Social Well-Being,* in «*Social Psychology Quarterly*» Vol. 61, No. 2, pp. 121-140.

LIPPMAN P.C. (2010), *Evidence–Based Design of Elementary and Secondary schools. A Responsive Approach to creating Learning Environments*, John Wilwy & Sons, Inc., Hoboken New Jersey.

MALLGRAVE H.F. (2015), *L'empatia degli spazi. Architettura e neuroscienze*, Raffaello Cortina Editore, Milano.

MARCARINI M. (2016), *Pedarchitettura. Linee storiche ed esempi attuali in Italia e in Europa,* Studium, Roma.

MARTINELLI M. (2004), *In gruppo si impara. Apprendimento cooperativo e personalizzazione dei processi didattici*, SEI, Torino.

MINCU M.E. (2011) (Ed.), *A Ciascuno la sua scuola. Teorie, politiche, contesti della personalizzazione*, Sei Torino.

MIUR (2013), *Linee Guida di Edilizia Scolastica, Roma.*

MIUR (2015), *Legge 13 luglio 2015, n. 107, "La Buona scuola", Riforma del sistema nazionale di istruzione e formazione e delega per il riordino delle disposizioni legislative vigenti*, Roma.

PARLAMENTO EUROPEO (2006), *Competenze chiave per l'apprendimento permanente — un quadro di riferimento europeo*, Bruxelles.

SANTOIANNI F. (2010). *Modelli e strumenti di insegnamento*, Carocci, Roma, pp. 68-73.

SASSONE A., SCEVOLA C. (2017), "*Spazi Colore": un esempio di trasformazione di ambienti scolastici per la sperimentazione didattica*, Poster presentato al Convegno e mostra laboratorio «Progettare scuole insieme fra pedagogia, architettura e design», 27-28 Ottobre 2017, Facoltà di Scienze della Formazione, Bressanone.

VOLPICELLI L. (1964), *La scuola come casa*, in Id., *L'educazione contemporanea*, vol. II, Armando Armando, Roma.

VOLPICELLI L. (1966), *Architettura scolastica*, in Id., *L'educazione contemporanea*, Armando Armando, Roma, Vol. III.

VYGOTSKY L. S. (1980), *Pensiero e linguaggio*, Giunti Barbera, Firenze.

ZUCCOLI F. (2017), *Un ambiente che può essere gabbia o stimolo. Le voci e le riflessioni dei docenti*, in M. FIANCHINI (Ed.), *Rinnovare le scuole dall'interno. Scenari e strategie di miglioramento delle infrastrutture scolastiche*, Maggioli Editore, Sant'Arcangelo di Romagna (RN).

WOOLNER P. (2010), *The Design of Learning Spaces*, Continuum International Publishing Group, London.

IO E SIERPINSKI:

DIARIO DI UN'AMICIZIA ALLA SCUOLA DELL'INFANZIA.

Monica BENEDETTI

Scuola dell'Infanzia, Istituto Comprensivo 1 , Poggibonsi

Abstract

L'idea di sviluppare questo progetto nasce da un percorso di formazione che ho seguito su matematica e arte. Rimasta colpita dai frattali e in particolare dal triangolo di Sierpinski, mi sono chiesta se i miei piccoli allievi sarebbero stati in grado di scomporre e ricostruire un triangolo equilatero con altri triangoli equilateri. Ho pensato che questa potesse essere un'opportunità per lavorare su argomenti e oggetti meno noti ma in grado di portare a conseguire alcune delle competenze previste dalle Indicazioni Nazionali.
A partire da un triangolo equilatero, attraverso varie attività laboratoriali, i bambini sono riusciti ad assemblare un triangolo di Sierpisnki e a riconoscerne l'autosimilarità tanto da giungere a ricostruirlo e disegnarlo in totale autononia. La naturale curiosità e la creatività dei bambini mi ha aiutato a condurre il percorso e a rimodularlo in base alle loro scoperte e alle loro domande.

Obiettivo di questo progetto è stato ricercare soluzioni diverse per la scomposizione in triangoli sottomultipli di un triangolo equilatero (frattale triangolo di Sierpinski) e riuscire alla fine del progetto a riconoscere il frattale nella figura ricomposta. L'attività è stata rivolta a sedici bambini di una sezione eterogenea, quattro di 4 anni e 12 di cinque anni, tra cui un bambino con sostegno che ha seguito solo la prima parte del percorso, supportato come tutti gli altri da una didattica laboratoriale fortemente inclusiva.

Dalle interviste individuali proposte ai bambini alla fine del percorso, è emerso un grande apprezzamento di queste modalità di lavoro. I bambini hanno dichiarato di essersi sentiti molto sostenuti dai compagni, di aver ricavato spunti per soluzioni nuove e di essersi divertiti a lavorare "come una grande famiglia", potendo confrontare il proprio lavoro con quello degli altri senza paura di sbagliare.

L'obiettivo è stato raggiunto attraverso varie fasi di lavoro, abbiamo proceduto per gradi soffermandoci maggiormente dove è risultato necessario.

Per motivi pratici riporto i passaggi maggiormente significativi attraverso alcune foto.

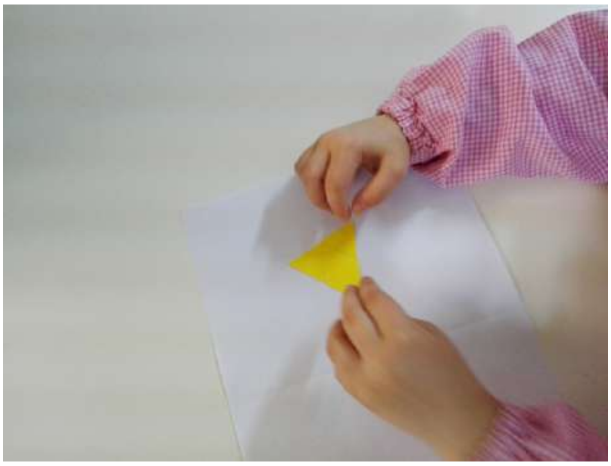
Fase 1: dopo aver osservato un triangolo appoggiato sul pavimento e aver fatto ognuno le proprie osservazioni, ho distribuito 48 triangolini a due gruppi col comando di comporre un'unica figura utilizzandoli tutti in modo che fossero il più vicini possibile, ma senza soprammetterli mai.

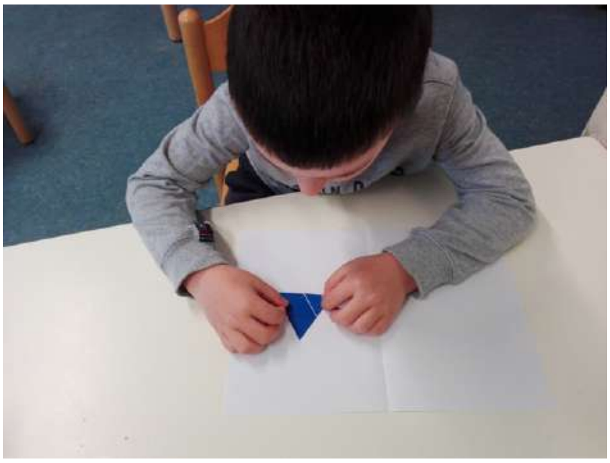


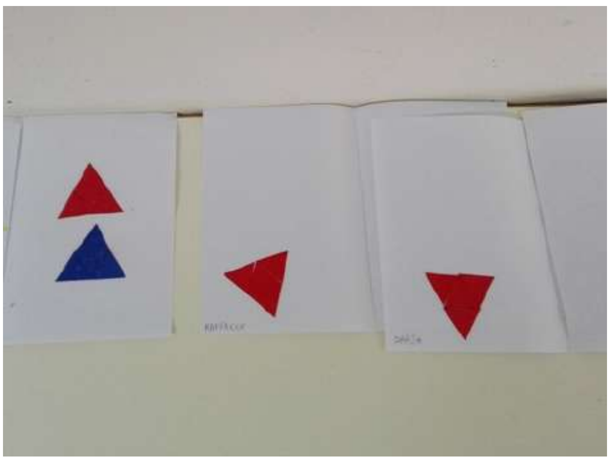
Fase 2: Su un foglio colorato, con un numero inferiore di triangoli, ognuno realizza una composizione a piacere seguendo le stesse regole della fase1. Si azzardano pure delle stelle! "Maestra, ma io la stella non la so fare…" "Allora, immagina la tua stella e incollala sul foglio". Rassicurati, tutti procedono. E con ottimi risultati.

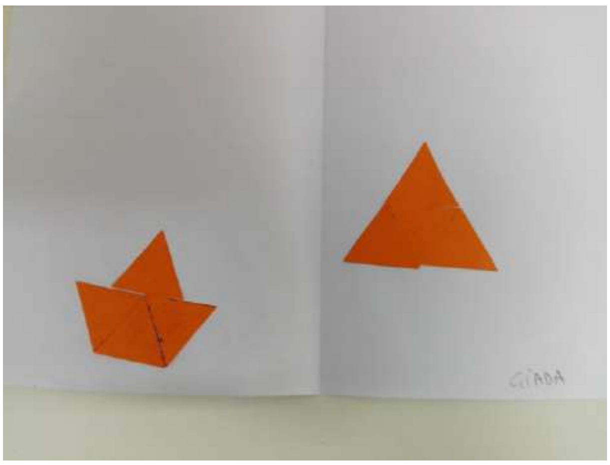


Fase 3: utilizzando quattro triangolini, bisogna costruirne uno più grande. Si prova da soli, in coppia e in piccoli gruppi fino a trovare la soluzione.





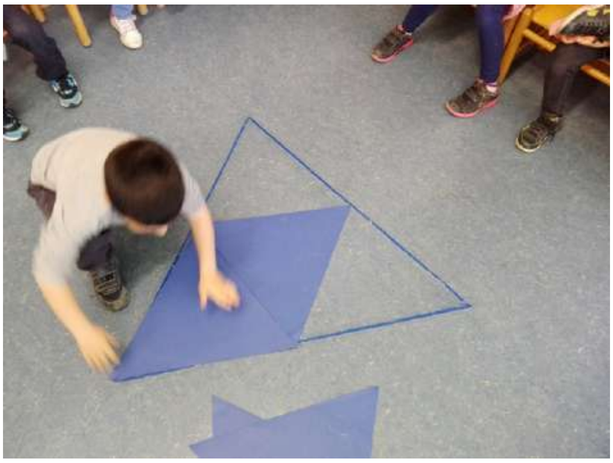


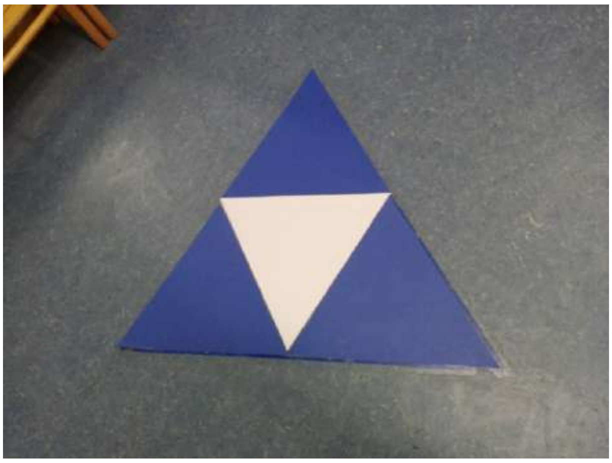


“Ma però so’ venuti tutti uguali!”

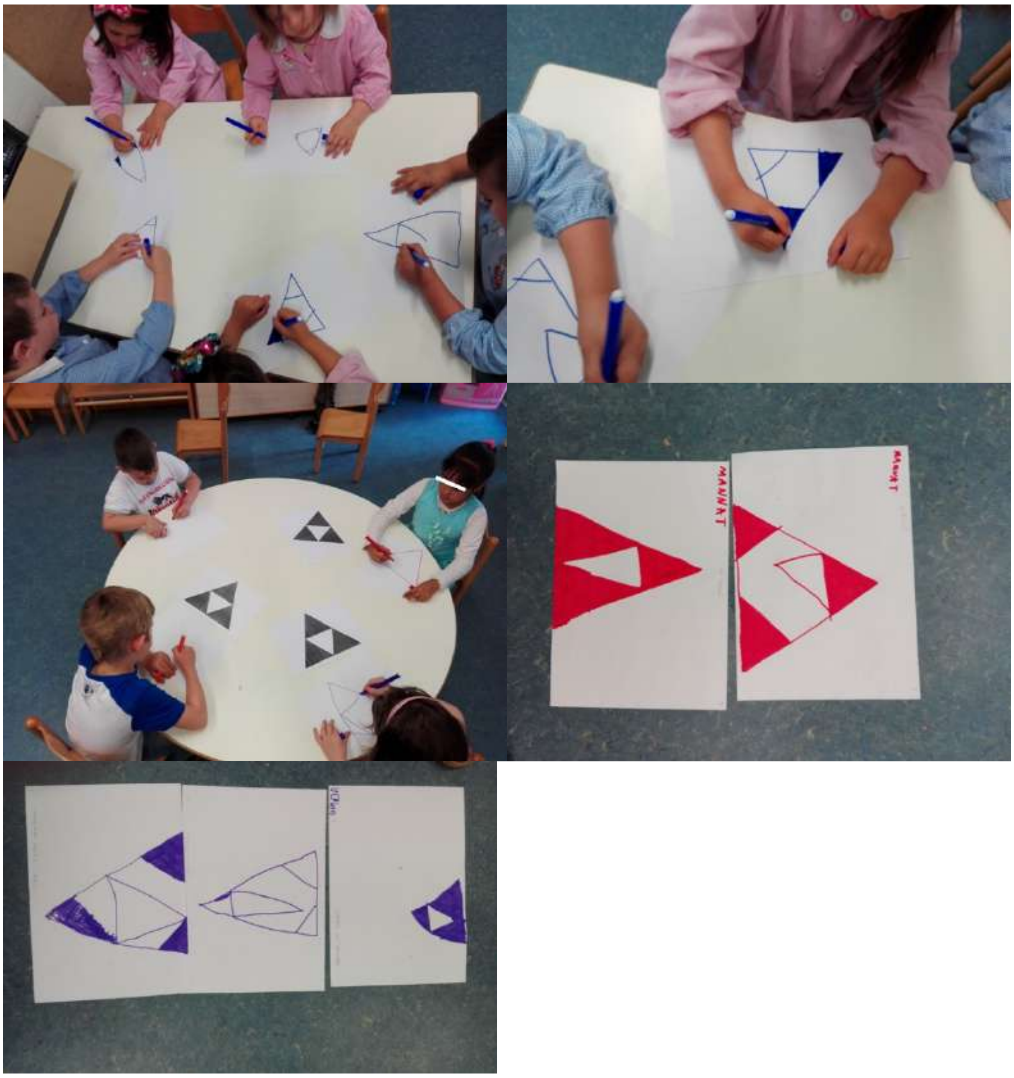
“Io prima ho fatto come una barchetta poi però ci so’ riuscita!”

Fase 4: sul pavimento della sezione si costruisce un triangolo più grande, sempre con 4 pezzi, che da un lato è blu e da un lato bianco. “Maestra, però dentro la riga è più facile!” Si cerca una soluzione perché anche da lontano si capisca che non si tratta di un’unica figura, ma di quattro parti unite. Quindi, dopo vari tentativi, i bambini decidono di usare entrambi i lati.

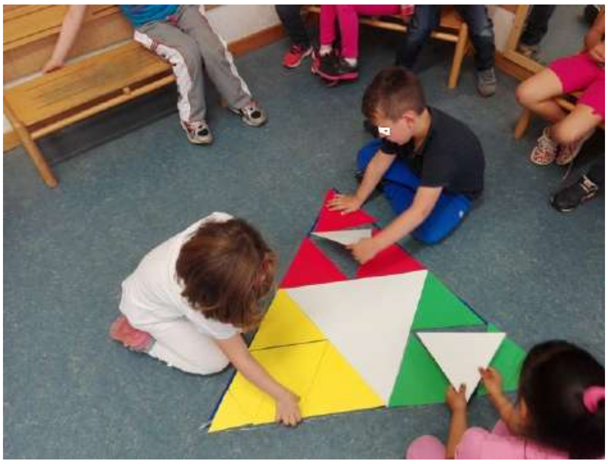


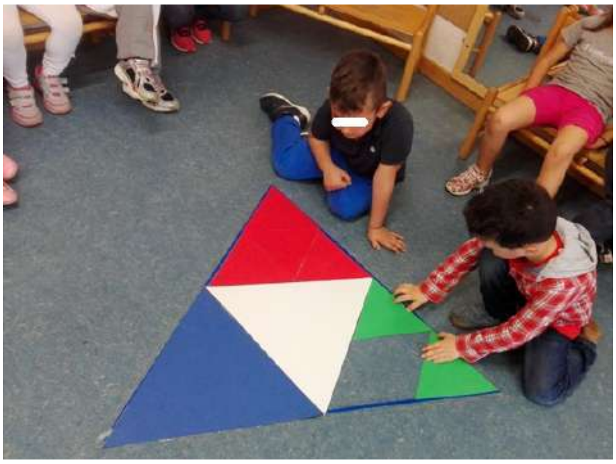
Fase 5: I bambini osservano il triangolone sul pavimento e provano a riprodurlo su carta. Ma come è difficile! Stentano a disegnarlo e tornano spesso ad osservarlo vicino al pavimento… Con l'aiuto di una fotocopia in bianco e nero sul tavolino riescono molto meglio. Possono provare tutte le volte che vogliono. Quando pensano di aver sbagliato, chiedono un nuovo foglio e io appunto ogni loro commento.



Fase 6: ognuno mette per terra tutti i suoi tentativi e si confronta con i compagni

Fase 7: tutti i triangoli vengono sostituiti con altri di uguale grandezza e colore diverso. Tutti i bambini diventano "esperti di ricomposizione" e mostrano di divertirsi nel trovare soluzioni diverse, consigliandosi, suggerendo o modificando il lavoro collettivo



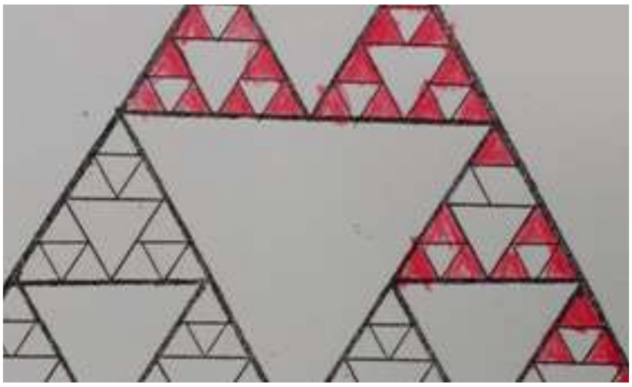


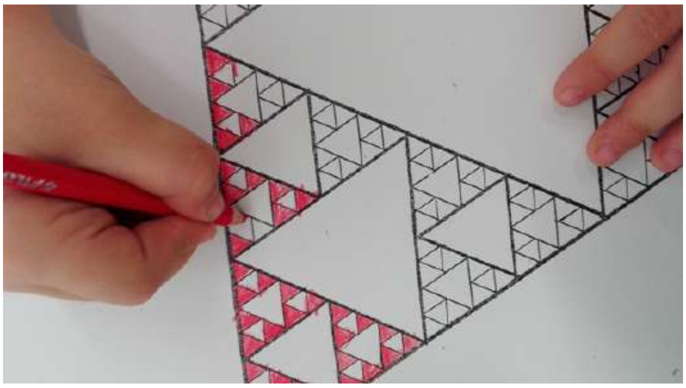
Fase 8: colorare la fotocopia come il modello (notare che ognuno segue la propria direzione visiva)

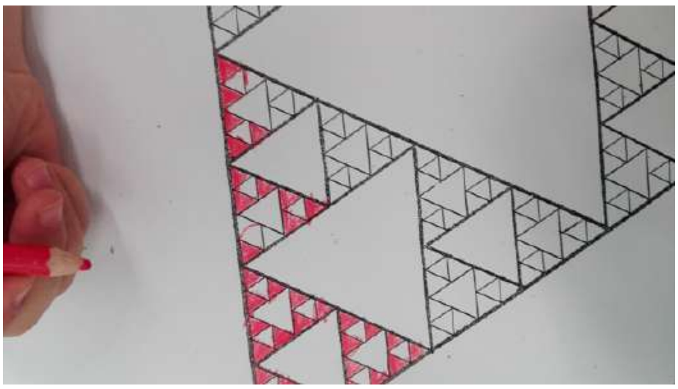
Fase 9: colorare la fotocopia di un unico colore, verde o rosso. Creiamo strani puzzle che si trasformano continuamente

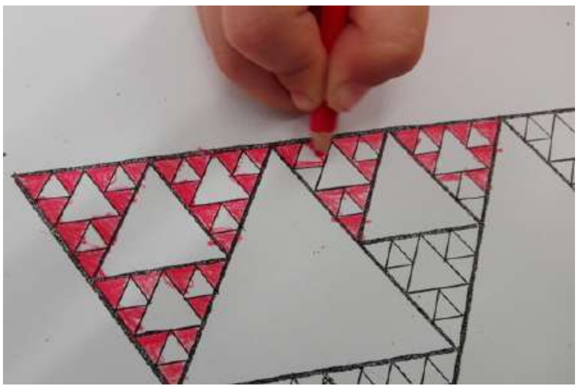
Fase 10:A questo punto del lavoro, ho pensando di introdurre “un elemento esterno”, un personaggio fantastico che interagisse con i bambini e motivasse il loro operato attraverso un coinvolgimento più empatico di quanto non potessi fare io con le mie proposte matematiche.

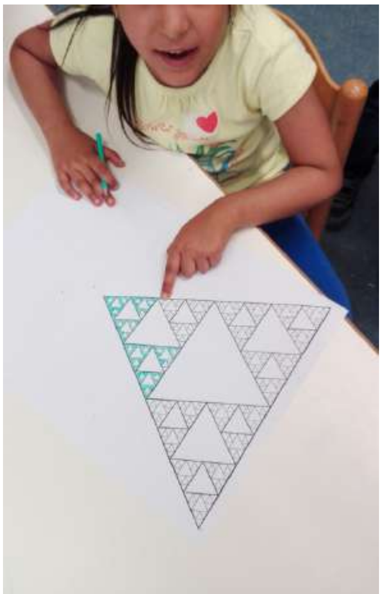
Ed ecco arrivare il Signor Sierpinski. Appare in classe sotto forma di disegno. I bambini inventano la sua storia. Lui consegnerà lavori “super difficilissimi” o “impossibili “ da realizzare! I bambini accettano tutti con entusiasmo la sua sfida. Ormai, sono degli esperti in materia…Un bambino mi fa notare, a colpo d’occhio, che Sierpinski ha dimenticato di fare una linea in quello “Impossibile”. Avverto chi ha scelto quella scheda che forse Sierpinski ha “dimenticato” di fare qualcosa, se si accorgono che è così correggano l’errore. Infatti, puntualmente…”eccolo, maestra. Ora ce lo faccio”. Il Signor Sierpinski diventa un amico che secondo loro si aggira nella scuola e infatti un giorno un bambino mi si presenta con un mano un sassolino di forma triangolare dicendo “ Il Signor Sierpinsky ha perso un dentino!”

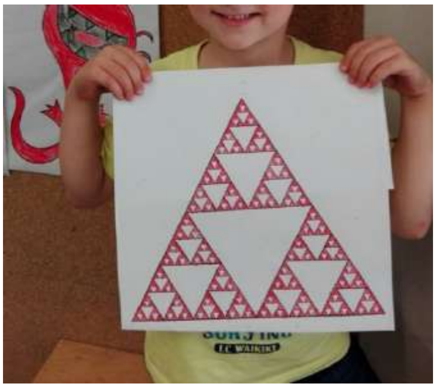


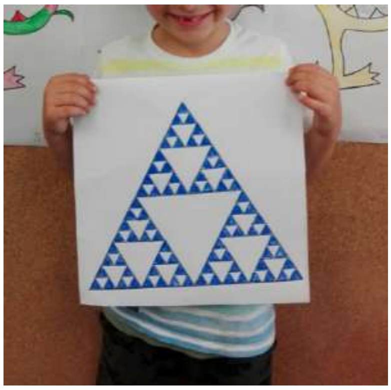


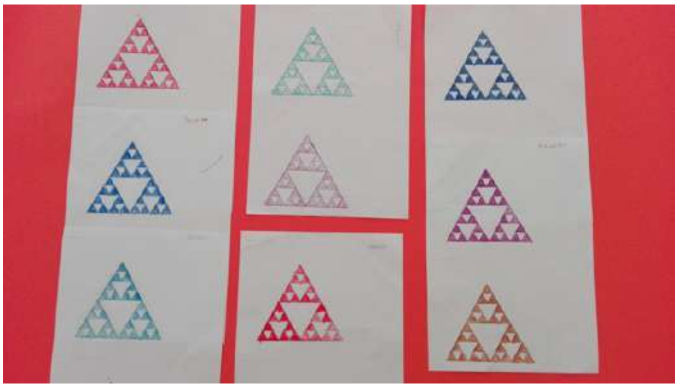












Fase 11: Il signor Sierpinski torna a vivere nel suo lontano paese d'origine, lasciando ai bambini una lettera di saluti e il suo dono più prezioso: il "Sierpinski d'oro", di cui tutti sono molto orgogliosi!

Fase 12: per verificare il raggiungimento del secondo obiettivo che mi ero prefissata (riconoscimento di un frattale nella figura ricomposta) ho intervistato individualmente i bambini, chiedendo come sapessero dove colorare nei compiti assegnati del signor Sierpinski e come lo avrebbero spiegato ad un bambino di un'altra sezione che gli avesse chiesto indicazioni. Riporto alcuni stralci:

"…devi colorare solo quelli che non sono nel mezzo…"

"…quelli nel mezzo non si colorano mai, perché sennò se questo lo fai tutto di un colore non c'è più l'apertura"

"…io coloro dalla punta e poi vado in basso. La punta è sempre colorata"

"…quelli in mezzo sono bianchi, quelli intorno, no"

"…tutti i triangoli sono colorati,quelli grandi non si colorano, quelli piccini si ma quello in centro, no"

"…si inizia a colorare da sopra, si deve colorare tre sì e uno no. Dopo, giù e dopo giù e si

CONCLUSIONI

Sono rimasta stupita delle potenzialità dei bambini emerse attraverso questo lavoro, di gran lunga superiori alle mie aspettative. La proposta è importante, ma la regia lo è molto di più, poiché i veri attori dell'apprendimento sono i bambini, che molto spesso fanno virare l'obiettivo verso direzioni imprevedibili. L'atmosfera di accoglienza, collaborazione, possibilità e diversità è condizione indispensabile perché il miracolo dell'apprendimento avvenga. Ognuno apporta il proprio personale contributo, il suo PUNTO DI VISTA. Se la proposta è fatta nel modo corretto non ci sono vincitori e perdenti, ma conquiste e conquistatori. Conquistatori molto orgogliosi perché "MAESTRA, CI SONO RIUSCITO!!!"

AL DI LÀ DEL MURO. IL NODO DELLA VALUTAZIONE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN UN CONTESTO RESTRITTIVO.

Francesco BUINI[1], Nelly MAHMOUD HELMY[2], Francesca RICCI[3]

[1] *Istituto di Istruzione Superiore "T. Sarrocchi", Siena (SI)*

[2] *Istituto "San Giovanni Bosco e Cennino Cennini", Colle di Val d'Elsa (SI)*

[3] *Dipartimento di Ingegneria Informatica e Scienze Matematiche-Università di Siena, Siena (SI)*

Riassunto

La relazione ripercorre l'esperienza di un anno di insegnamento in una scuola secondaria di secondo grado e in una di primo grado, per adulti, ubicate all'interno del carcere di San Gimignano. Partendo dalle riflessioni legate al primo impatto con la realtà carceraria si è portato all'attenzione del lettore il processo di comprensione della realtà all'interno del quale si muoveva il nostro orizzonte didattico, e la comune riflessione sulle dinamiche dell'insegnamento in un contesto restrittivo, sulle questioni legate alle scelte relative agli argomenti da trattare, alla costruzione di competenze, alle metodologie. Si è infine approdati al delicato nodo della valutazione, attorno al quale in un contesto così delicato finivano per avvitarsi le tante contraddizioni di quel luogo e le riflessioni sulla necessità e il senso di fare scuola in realtà come quella di Ranza.

"*Educare in carcere significa educare ad apprendere.*
Il carcere è stato pensato come un luogo di eccezione
(perché delinquere è una eccezione alla regola),
e quindi anche la scuola lì dentro deve essere eccezionale"
Mario Tagliani

La scuola di Ranza.

Le considerazioni qui riportate sono il frutto di un incontro. L'incontro fra tre insegnanti, due di matematica e una di lettere, di due scuole diverse, che, in anni scolastici differenti (2014/2015 e 2015/2016), hanno insegnato nella scuola secondaria di primo grado e nell'istituto per l'Enogastronomia Bettino Ricasoli, ubicate all'interno della casa di reclusione di San Gimignano. Queste poche pagine rispondono al bisogno di riflessione su quell'avventura professionale e umana, durata per ciascuno l'arco di un solo ma intensissimo anno scolastico, al tentativo di dipanare la matassa dei pensieri che via via si sono accumulati, e alla volontà di condividere con altri le considerazioni maturate, guardando e riguardando, *a mente fredda*, i tanti momenti di quel percorso. Il tema proposto dal XX Seminario di Formazione Nazionale di GRIMeD che andava a toccare proprio uno dei punti nevralgici di quella esperienza si è rivelata l'occasione propizia, galeotta, se vogliamo ricorrere a un termine caro ai nostri trascorsi professionali in quel luogo, per dar voce e ufficialità agli interrogativi sui quali ci eravamo confrontati già quando le nostre esperienze si erano intersecate nelle aule delle scuole di Ranza. Le competenze diverse, distanti, acquisite insegnando ognuno la propria disciplina, hanno permesso di guardare al problema da diversi punti di osservazione, animati però da un comune sentire, da una stessa idea di scuola. Il tema del convegno ha tuttavia circoscritto l'indagine che, frutto di riflessioni comuni, si concentra prevalentemente sui problemi e le dinamiche relativi all'insegnamento della matematica[1].

Innalzando la durata dell'obbligo scolastico fino a dieci anni, la legge del 20 gennaio 1999 ha promosso e ampliato anche l'offerta formativa all'interno delle carceri. La casa di reclusione di Ranza ospita al suo interno oltre ad un corso di alfabetizzazione e ad una scuola secondaria di primo grado, anche l'istituto professionale per l'Enogastronomia I.I.S. Bettino Ricasoli (succursale dell'Istituto per l'enogastronomia e l'ospitalità alberghiera di Colle di Val d'Elsa), l'istituto tecnico con indirizzo turistico Roncalli, e offre la possibilità di iscriversi ad alcuni corsi di laurea. Il nostro intervento intende raccontare non tanto i difficili aspetti della vita all'interno dell'istituto e le tante limitazioni che la segregazione impone all'esistenza di chi la subisce, ma il significato, il senso e le dinamiche dell'insegnamento in un contesto restrittivo nonché le scelte e i condizionamenti che esso inevitabilmente impone alla didattica, al rapporto con gli studenti e alla valutazione. Il regime carcerario, le esigenze di sorveglianza e i regolamenti che vigono in questo, come in ogni istituto di reclusione e di detenzione del paese, impongono forti restrizioni non solo all'esistenza di chi sconta la pena ma a tutte le attività che si svolgono al di là di quel muro, compresa la scuola, ospitata nei locali destinati alle attività culturali e ricreative al piano terra del blocco della detenzione, dal quale i detenuti non possono uscire. I locali progettati secondo i modelli estetici dell'architettura carceraria non hanno aperture verso l'esterno, le finestre, piccole e dotate di sbarre, si trovano in alto, quasi a ridosso del soffitto, in modo da impedire qualsiasi fuga anche solo dello sguardo verso un esterno che esterno in realtà non è, perché sempre compreso all'interno del perimetro del secondo cerchio di mura che delimitano e racchiudono lo spazio della detenzione. Quasi del tutto priva non solo di supporti informatici che oggi animano l'attività didattica, ma anche di quegli strumenti, oramai essenziali e consueti, come libri, lettori DVD, proiettori, di cui ogni studente e ogni docente possono, normalmente, disporre (ma che, in quel contesto, sono limitati nel numero e sempre sottoposti a controllo), la scuola in carcere è una scuola vecchio stile.

Secondo i dati forniti dal Ministero della Giustizia, aggiornati al 16 luglio 2015, l'istituto di reclusione di Ranza conta 372 detenuti, condannati in via definitiva, distribuiti con una forte disuguaglianza numerica tra le sezioni di Media e di Alta Sicurezza (M.S. e A.S.). Nell'anno scolastico 2014-2015 sono stati 210 i detenuti che si sono iscritti nelle scuole presenti all'interno della casa di reclusione, e di questi 141 sono quelli che hanno frequentato con regolarità le lezioni fino alla loro conclusione.

La scuola secondaria di primo grado, dipendente dal CPIA di Poggibonsi, prevede, in ottemperanza all'articolazione degli studi dei corsi per adulti, di concentrare la didattica dell'intero corso di studi triennale in un solo anno, con un numero di ore settimanali di matematica e scienze inferiore a quello della scuola regolare: quattro invece di sei. Il corso di Enogastronomia invece si articola su cinque anni, al pari di un ordinario corso di scuola secondaria, con un numero di ore inferiore rispetto alla didattica ordinaria. Le classi, poste secondo l'articolazione del carcere, all'interno delle sezioni di alta e di media sicurezza, avevano caratteristiche molto diverse. Per quel che concerne la scuola secondaria di primo grado, in A.S. la situazione era abbastanza omogenea: quasi tutti gli studenti (circa 17), ad eccezione di uno, erano italiani, età media sui quaranta anni, condannati a scontare lunghi periodi di detenzione per reati

[1] Francesca Ricci (F.R.) ha curato le parti che si riferiscono all'insegnamento della matematica nella scuola media, Francesco Buini (F.B.) si è dedicato all'analisi dell'insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado. Nelly Mahmoud, docente di italiano e storia all'Enogastronomico di Ranza, ha curato la stesura del saggio frutto della riflessione e della elaborazione corale degli autori.

legati ad associazioni criminali; in M.S. la classe era composta da una decina di studenti in tutto, per metà italiani e per metà magrebini o slavi, quasi tutti sui trent'anni. Alcuni avevano conseguito il titolo di scuola primaria più o meno regolarmente nelle scuole italiane molti anni prima, mentre altri, soprattutto gli stranieri, pur essendo spesso già in possesso di un titolo di studio, avevano seguito corsi di alfabetizzazione per lo più in carcere. Le classi dell'Enogastronomico (nove) apparivano estremamente eterogenee, sia dal punto di vista numerico, sia da quello anagrafico (l'età media era di circa 45 anni) sia per quel che concerneva la nazionalità degli studenti. Come per la secondaria di primo grado, in A.S. il numero dei corsisti stranieri era esiguo, mentre in M.S. costituivano quasi la maggioranza delle classi.

La prima volta

Il primo giorno di scuola (all'interno di un carcere) è un giorno che un insegnante difficilmente può scordare. L'ingresso nella scuola è subordinato all'adempimento di alcune ineludibili prassi e al superamento di alcune imponenti barriere: dal primo fino all'ultimo giorno, per entrare nelle nostre classi, per arrivare dai nostri studenti, si è dovuto, inevitabilmente, varcare almeno quattro cancelli, notificarsi tre volte, sia all'ingresso che all'uscita, subire un controllo del materiale e degli oggetti che ognuno di noi aveva portato con sé. L'impressione che la macchina della sicurezza provoca su chi non ha alcuna dimestichezza con quei gesti è, a dir poco, disorientante; quelle operazioni che col passare dei giorni diventano un'abitudine – sempre poco piacevole, ma comunque un'abitudine – il primo giorno, la prima volta, lasciano un segno che spinge la mente lontano da quello che si è abituati a pensare essere la scuola, un segno che spinge in profondità pensieri e sensazioni fino ad incunearle nei meandri della memoria e farle restare sempre tra i ricordi. Si arriva da quelli che impareremo a considerare i nostri studenti non con l'atteggiamento sicuro di persone abituate a muoversi entro spazi oramai consueti, ad adempiere a compiti divenuti familiari, a gestire con sicurezza dinamiche relazionali ben note, ma con i segni, ben leggibili sul volto, dell'impatto che quegli spazi, quei meccanismi e quelle persone hanno esercitato su di noi. La prima volta che si entra in classe si è insomma disarmati, senza difese, al cospetto di persone adulte, condannate in via definitiva. Il primo giorno i loro sguardi ci hanno interrogato, il loro interrogare ci ha, in un primo momento, turbato, ma i loro modi cordiali e il rispettoso silenzio con il quale hanno ascoltato le nostre parole sono riusciti a rassicurarci, sono riusciti a spazzare via un po' di quella paura che aveva accompagnato il nostro ingresso in quelle aule, montando ad ogni passo lungo quegli interminabili, deserti, grigi corridoi.

Per dare un'idea dell'intricato groviglio di emotività e aspettative di quel primo giorno si riportano di seguito le attività svolte in due classi, una della scuola media e una della superiore, la II del corso di Enogastronomia, entrambe del circuito di A.S., che sono state proprio le prime incontrate quel giorno.

F.R. Il primo giorno ho iniziato con gli studenti di A.S. Ho proposto loro, come faccio sempre all'inizio dell'anno quando incontro per la prima volta una nuova classe, di raccontare il loro rapporto con la matematica e di ricostruire la storia della loro relazione con la disciplina. Sono rimasti un po' spiazzati dalla richiesta insolita di scrivere un *racconto* durante l'ora di matematica. Ho ancora con me quegli elaborati. Si tratta di testi piuttosto brevi, qualche riga, qualche frase. Alcuni molto ingenui. Riporto quelli che ho trovato più significativi, interessanti, stimolanti, non per la profondità delle riflessioni, ma per il modo nel quale alcuni di loro hanno guardato quello strano problema che avevo proposto[2].

«Mi piacerebbe imparare perché ho studiato poco».

«Il mio problema è imparare la matematica veramente, non mi è mai entrata nella testa la divisione e la sottrazione, poi altre cose come la moltiplicazione, mi posso impegnare».

«Io (sono) andato (a) scuola (fino alla) prima media, non so tanto della matematica, con sottrazioni e moltiplicazioni mi arrangio, ho difficoltà con le divisioni, spero che con lei riesco a imparare».

«La matematica è una materia che mi appassiona dai tempi che frequentavo le elementari. Mi è servita nel gestire il mio lavoro che consiste nel commercio di pellami. Oggi vorrei ulteriormente informarmi su altri aspetti della matematica, tipo espressioni, le sue regole. Riguardo l'addizione, la sottrazione, la divisione, non dovrei avere grosse difficoltà».

«La matematica è una materia che mi è sempre piaciuta, anche se a volte trovo un po' di complicazioni, metto sempre impegno per cercare di capire il meccanismo. La cosa che non ricordo tanto bene sono le espressioni: ricordo solo che si toglie prima la parentesi (poi la [e in fine la { , però non ricordo la procedura, cioè che operazione devo svolgere per prima, e un po' alla volta vorrei ricordare tutta la procedura e capire bene tutto. Per quanto riguarda le divisioni e le moltiplicazioni le ricordo non tanto bene, perché è un po' di anni che non frequento più la scuola, ho fatto fino alla III media, però non mi sono presentato agli esami e alla fine non sono stato ammesso. Ora vorrei cercare un po' alla volta di riuscire a ricordare tutto e cercare di ottenere un buon risultato a fine anno».

F.B. Come sempre, il primo giorno per attirare l'attenzione e stimolare la curiosità degli studenti verso una disciplina considerata troppo spesso astratta e lontana dagli orizzonti quotidiani della vita reale ho provato a confrontarmi su una lettura e su divertenti e stimolanti problemi di logica matematica. Quella mattina ho portato con me una pagina di *Non si può dividere per zero. Storie di matematica da passeggio* di Adrian Paenza. Il racconto, *La mano della principessa* di Pablo Amster, è il testo che l'autore, un docente di matematica di un'università argentina, propone sempre alla prima lezione di ogni corso che deve tenere a studenti che ancora non conosce. Ho consegnato e letto quella pagina, perché condivido quelle riflessioni e le emozioni che suscita:

«Una nota serie ceca di cartoni animati racconta, suddivisa in capitoli, la storia di una principessa la cui mano è contesa da un gran numero di pretendenti. Costoro devono convincerla: nei vari episodi si mostrano i molteplici e sorprendenti tentativi di seduzione che ognuno di loro mette in campo. Così, facendo ricorso a diversi stratagemmi, alcuni dei quali più semplici, altri davvero fantasiosi, i pretendenti sfilano uno dopo l'altro senza che nessuno riesca anche minimamente a toccare le corde del cuore della principessa. Ricordo, per esempio, uno di loro dare vita a una pioggia di luci e di stelle; un altro effettuare un volo maestoso e invadere lo spazio con i suoi movimenti. Niente. Al termine di ciascun capitolo appare il volto della principessa, che non lascia trapelare emozione alcuna. L'episodio che chiude la serie ci regala l'inaspettato finale: in contrasto con le meraviglie offerte dai suoi antecessori, l'ultimo dei pretendenti estrae con umiltà dal suo mantello un paio di occhiali, e li tende alla principessa: lei li indossa, sorride e gli porge la mano.
La storia, al di là delle possibili interpretazioni, è molto affascinante, e ciascun episodio in sé racchiude una grande bellezza. Ciononostante, solo la risoluzione finale ci dà la sensazione che tutto si concluda nel giusto modo. In effetti c'è un sapiente dosaggio della tensione che ci porta a pensare, a un certo punto, che niente soddisferà la principessa. Con il procedere degli episodi e, di conseguenza, il crescente scarseggiare dei possibili stratagemmi di seduzione, questa principessa insaziabile ci viene in odio. Quale cosa straordinaria starà mai aspettando? Ma ecco, all'improvviso, saltar fuori il dato che ignoravamo: la principessa non si emozionava davanti alle meraviglie che le venivano offerte perché non poteva vederle. Il problema era questo, dunque. E' chiaro: se il racconto rivelasse il dato un po' prima, il finale non ci

[2] I testi riportati sono stati solo in parte epurati dagli errori di ortografia, morfologia e sintassi.

sorprenderebbe. Potremmo ammirare comunque la bellezza delle immagini, ma reputeremmo un po' stupidi questi spasimanti e tutti i loro tentativi di seduzione, perché noi sapremmo che la principessa è miope. Non lo sappiamo: la nostra idea è che il problema risieda nei pretendenti, che offrono, a quanto sembra, troppo poco. Quello che fa l'ultimo, già al corrente del fallimento degli altri, è cambiare la prospettiva delle cose. Guardare il problema in un altro modo. Se voi non sapeste [qui Pablo si rivolge agli studenti di Belle Arti che costituiscono il suo uditorio] di cosa tratta questo corso, forse in questo momento vi meravigliereste come vi siete meravigliati prima con il finale della storia: parleremo (o stiamo parlando) di matematica. In effetti, parlare di matematica non è soltanto dimostrare il teorema di Pitagora: è anche parlare d'amore e raccontare storie di principesse. Anche nella matematica c'è bellezza. Come disse il poeta Fernando Pessoa: «Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo. Il fatto è che pochissimi se ne accorgono». Pochissimi se ne accorgono … Ecco il perché del racconto della principessa; perché il problema, come indovina l'ultimo dei pretendenti, è che «Le cose più interessanti di questo paese non si vedono» (Henri Michaux, *Nel paese della magia*). Molte volte mi sono sentito nei panni dei primi spasimanti. Così, sebbene mi sia sempre impegnato per esporre le questioni matematiche più belle, la maggior parte delle volte, devo ammetterlo, i miei infervorati tentativi non hanno ottenuto la risposta sperata. Questa volta proverò ad avvicinarmi all'umile spasimante dell'ultimo capitolo. Sulla matematica, secondo Whitehead «la creazione più originale dell'ingegno umano», c'è parecchio da dire. Ecco il perché di questo corso. Solo che oggi preferisco anch'io guardare le cose nell'altro modo e cominciare raccontando una storia».

Le parole che avevo scelto erano riuscite a sorprenderli e a incuriosirli. Provando a cambiare la prospettiva delle cose, guardando il problema in un altro modo avevo mostrato loro un'altra immagine della matematica e della scuola. Avevo rotto il ghiaccio, toccando le corde della loro curiosità intellettuale, e forse della loro emotività. I segni, le espressioni che leggevo bene sui loro volti mi rassicurarono e allo stesso tempo mi convinsero a proporre subito un quesito logico-matematico che confermasse la prospettiva dalla quale volevo insegnare loro a guardare la mia disciplina. Il quesito proposto è il seguente:

«Il complesso degli U2 sta per fare un concerto a Dublino. Mancano 17 minuti all'inizio del concerto ma, per raggiungere il palco, i membri del gruppo devono attraversare un piccolo ponte che è tutto al buio, disponendo di una sola torcia elettrica. Sul ponte non possono andare più di due persone per volta. La torcia è essenziale per l'attraversamento, per cui deve essere portata avanti e indietro (non può essere lanciata da una parte all'altra) per consentire a tutti di passare. E tutti sono dalla stessa parte del ponte. Ciascun componente del complesso cammina a una velocità diversa. I tempi individuali per attraversare il ponte sono:

o Il Cantante	Bono	1 minuto
o Il Chitarrista	Edge	2 minuti
o Il tastierista	Adam	5 minuti
o Il batterista	Larry	10 minuti

Se attraversano in due, la coppia camminerà alla velocità del più lento. Ad esempio: se Bono e Larry attraversano per primi, quando arrivano dall'altra parte saranno trascorsi 10 minuti. Se Larry torna indietro con la torcia saranno passati altri dieci minuti, per cui la missione sarà fallita. Qual è l'ordine che devono seguire per attraversare tutti il ponte in 17 minuti? La risposta al test non prevede alcun "trucco". Si tratta solo di indicare lo spostamento delle persone nell'ordine corretto».

I loro primi tentativi di risoluzione non sono stati diversi da quelli di tanti studenti ai quali, negli anni, avevo proposto il quesito. Ogni minuto che passava mi permetteva di comprendere che potevo concentrarmi solo sulla didattica senza più considerare l'ambiente all'interno del quale mi trovavo. E, allo stesso tempo, gli studenti avevano compreso che potevano proporre le loro soluzioni, senza timore. Si poteva dunque cominciare a fare matematica. E quando, quasi al termine della lezione, uno studente è riuscito a trovare la soluzione, ho ripreso, commentandola, la storia degli occhiali della principessa miope: «quello che fa l'ultimo, già al corrente del fallimento degli altri, è cambiare la prospettiva delle cose. Guardare il problema in un altro modo». «Era facile, perché non ci ho pensato prima?», ripetevano gli altri.

L'articolazione e le scelte della didattica.

Le classi riunivano corsisti con titoli di studio diversi e dunque con disomogenei livelli di preparazione. Soprattutto in media sicurezza, alcuni degli stranieri avevano conseguito un diploma di scuola superiore nel paese di provenienza, mentre molti degli studenti italiani non avevano proseguito gli studi oltre la scuola primaria. Tra questi, alcuni avevano ripreso un percorso interrotto molti anni prima, altri, non avendo completato a suo tempo neppure la primaria, avevano frequentato il corso di alfabetizzazione all'interno del carcere, che ne costituisce, nell'istruzione per adulti, l'equivalente. Dal punto di vista formativo l'alta sicurezza presentava una maggiore omogeneità soprattutto per quel che concerne la formazione di base: la quasi totalità degli studenti aveva frequentato e completato il ciclo della primaria, e non vi era, almeno per quella che è stata la nostra esperienza, una presenza sensibile di corsisti stranieri.

In un contesto così variegato e non privo di contraddizioni la scelta del programma da svolgere e delle metodologie da adottare non poteva prescindere dalla comprensione dell'ambiente all'interno del quale ci muovevamo e dalla considerazione, più che mai inevitabile, in quel luogo, della diversità di ogni singola persona che sceglie di intraprendere, per la prima volta, o di riprendere un percorso scolastico a suo tempo interrotto o trascurato. Il numero degli studenti e l'articolazione delle classi nell'ambiente carcerario di Ranza era piuttosto fluido e soggetto a continue variazioni, dovute al trasferimento degli studenti in altri istituti, al loro passaggio dalla sezione di alta a quella di media sicurezza e spesso ai turni lavorativi il cui orario coincideva di fatto con quello della scuola.

F.R. Per quello che riguarda la scuola secondaria di primo grado, il disomogeneo livello di partenza degli studenti e la necessità di condensare il programma dei tre anni di corso in un solo anno scolastico ha spinto a focalizzare l'attenzione su temi legati il più possibile alla realtà ma che portassero, comunque, allo sviluppo delle competenze richieste alla fine del primo ciclo scolastico.

Per questo motivo ho scelto di operare negli ambiti dell'aritmetica-algebra, della geometria e della probabilità e statistica orientandomi sui nuclei fondanti tematici del pensiero matematico: *il numero*, *lo spazio e le figure*, *le relazioni*, i *dati e le previsioni* e sui nuclei trasversali *argomentare e congetturare*, *misurare*, *risolvere e porsi problemi*, cercando per ciascun nucleo di mettere in atto un lavoro di ricostruzione e sistemazione concettuale.

Si è iniziato il lavoro dalla rivisitazione del significato di numero naturale, del sistema di rappresentazione e della funzione dei numeri naturali sia nella conoscenza comune che scientifica. Da questo percorso è scaturita una naturale riflessione sulle quattro operazioni aritmetiche richiamando il senso intuitivo e gli aspetti algoritmici. Quindi si è affrontato il problema del passaggio ai numeri razionali positivi, collocandolo nel contesto delle percentuali, e quello del passaggio agli interi, inserendolo nei tipici campi di esperienza dei debiti e delle temperature. Lo strumento metodologico utilizzato nella conduzione dell'attività è stata la discussione collettiva attivata attraverso formulazione di domande e argomentazione delle risposte.

A parte l'avvio che si è sviluppato lungo l'asse aritmetico, il lavoro è proseguito con una alternanza di problemi afferenti ai diversi nuclei, cercando di ripercorrere l'intreccio delle relazioni concettuali esistenti a livello delle mappe cognitive. In ambito geometrico ho sviluppato l'attività a partire dalle figure solide, attraverso classici problemi dai quali potesse scaturire una riflessione sul concetto di volume per confrontarlo con i concetti di area e perimetro anche in vista di costruire relazioni funzionali che rappresentino la variazione dell'uno rispetto all'altro. Nel corso dell'attività è stato possibile esplicitare il ruolo dell'equiestensione nella determinazione delle formule delle aree. Per esempio, proprio il problema delle aree ha condotto a ripensare al procedimento della misurazione. Così come semplici problemi geometrici hanno portato sull'asse algebrico per introdurre l'oggetto matematico equazione.

F.B. Delle nove classi dell'Enogastronomico sei sono quelle che mi sono state assegnate: una classe del biennio (la seconda di A.S.), e cinque del triennio, sia di A.S. che di M.S., in ognuna di queste erano previste 3 ore di lezione settimanali. La media sicurezza presentava anche una pluriclasse, la cui composizione è cambiata alla ripresa delle lezioni dopo la pausa per le festività natalizie: mentre prima di quella data vedeva riuniti gli studenti di quarta e di quinta, da gennaio, con il declassamento di cinque studenti trasferiti dall'alta alla media sicurezza, comprendeva i corsisti di terza e quarta.

Nonostante nutrissi qualche dubbio sul fatto che le strade percorse e le scelte fatte da chi si era prima di me confrontato con l'insegnamento in quel contesto fossero adeguate al tipo di specializzazione, un professionale a indirizzo Enogastronomico, e al tipo di scuola, una scuola per adulti, ubicata all'interno di un carcere, ho scelto dapprima di uniformarmi, per quel che concerne i programmi, alle scelte fatte dai docenti che mi avevano preceduto. Era infatti la prima volta che insegnavo all'interno di quella scuola e non potevo nemmeno prevedere quanti anni scolastici vi avrei trascorso. Inizialmente la programmazione è stata redatta ricalcando gli argomenti tradizionali del percorso d'insegnamento ordinario della matematica in una qualsiasi scuola superiore. In seconda si è resa necessaria tuttavia la rivisitazione del concetto di numero, per dare un significato agli insiemi numerici, dai Naturali ai Reali, passando ovviamente attraverso gli Interi e i Razionali. Cercando di mettere in risalto il forte legame tra aritmetica e algebra, si sono proposti problemi e quesiti che richiedevano, per arrivare alle soluzioni, la capacità di generalizzare, e che mettessero in luce la necessità del passaggio dal numero alle lettere. Si è approdati poi alle equazioni di primo e secondo grado, ed ai sistemi di equazioni in due incognite. In terza a partire dalle equazioni si sono introdotti i sistemi di equazioni in due incognite, poi il piano cartesiano per la rappresentazione delle funzioni e per la geometria analitica. Si è sfruttata in proposito la geometria analitica anche per riprendere la geometria del piano e per far capire agli studenti cosa significhi classificare le figure geometriche. In quarta, dopo aver introdotto il concetto di funzione, si è reso necessario riprendere sia le equazioni che le disequazioni. Nelle classi quinte si è tentato prevalentemente di insegnare le tecniche e le procedure dell'analisi matematica per svolgere uno studio completo di funzioni razionali fratte. Tuttavia al momento in cui è stata cambiata l'articolazione della pluriclasse ho deciso di svolgere un argomento completamente nuovo per entrambi i gruppi classe e che non richiedesse particolari pre-requisiti per essere affrontato. Rompendo gli schemi della didattica tradizionale della matematica nelle scuole secondarie di secondo grado, ho svolto un modulo sul calcolo delle probabilità, a partire dal gioco di azzardo[3].

Come insegnare.

[3] Vedi appendice 3: Chi vince il festival di Sanremo?

Dialogo costante, considerazione delle potenzialità di ogni singolo studente e attenzione alla particolare condizione nella quale si svolgevano quelle esistenze si sono rivelate condizioni necessarie per costruire un legame con le classi e per portare avanti lezioni che provassero a scavalcare l'approccio rigido docente-discente, coinvolgendo il più possibile i corsisti. Per superare le difficoltà imposte da quel luogo e da quello specifico percorso di apprendimento, l'attività didattica si è continuamente orientata verso situazioni che stimolassero l'interesse e distogliessero i corsisti dal pensiero fisso e del contesto nel quale si trovavano e del mondo dal quale erano stati separati, pensiero che rischiava di assorbire per intero l'attenzione e il tempo a disposizione della scuola. Aprirsi all'ascolto e alla comprensione di esigenze, difficoltà, storie, in certe occasioni era inevitabile, ma fare scuola imponeva il saper coniugare tante, disparate capacità, il saper tenere insieme tanti momenti, unire tante competenze: quella di ascoltare e quella di raccontare, quella di insegnare e quella di imparare, quella di comprendere la situazione e di dominarla.

La ricerca di problemi stimolanti da sottoporre agli studenti che aprissero la strada all'introduzione o allo svolgimento dei concetti fondamentali della disciplina ha accompagnato il percorso di insegnamento durante tutto l'anno scolastico. Sottoporre loro quesiti, problemi logici o attività voleva dire catturare la loro attenzione, fornire una ragione per continuare ad impegnarsi, per continuare a scontrarsi con i loro limiti, con le loro difficoltà.

F.R. Nelle classi della scuola secondaria di I grado si sono proposti quesiti relativi al concetto di numero che hanno fatto scaturire una serie di osservazioni che si riportano insieme alle domande proposte:

«Secondo voi cosa sono i numeri?»

- ✓ I numeri sono nove da 1 a 9 più lo 0; il resto è aggiuntivo;
- ✓ dal 10 in poi non esistono;
- ✓ i numeri sono come le lettere;
- ✓ ... sono valori;
- ✓ ... fanno parte della vita;
- ✓ ... sono mondiali;
- ✓ ... sono indicativi.

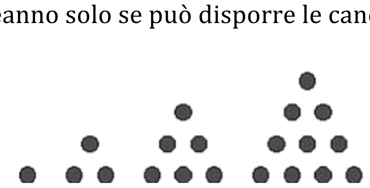
- Riflessioni Conclusive:
  - ✓ ci sono numeri *privilegiati*: 0, 1, ..., 9;
  - ✓ misurano quantità;
  - ✓ servono a ordinare.

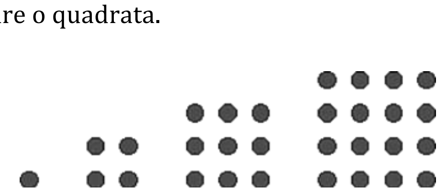
«Vi sconto la tabellina dell'1 e del 10: che percentuale vi ho tolto?»

F.B. Nelle classi della scuola di Enogastronomia si è scelto di confrontarsi insieme anche su alcune questioni che hanno fatto la storia della matematica, come per esempio l'irrazionalità della radice quadrata di 2. Si fornisce di seguito anche un esempio delle attività proposte per introdurre il concetto di funzione.

Le torte del Signor Orso

Il Signor Orso è un pasticciere alquanto scorbutico, in quanto accetta ordinazioni per le feste di compleanno solo se può disporre le candeline in forma triangolare o quadrata.





n=1   n=2   n=3   n= 4   ...   *n =1   n=2   n=3   n= 4   ...*

FORME TRIANGOLARI   ***FORME QUADRATE***

a. Indicare sia il numero delle candeline **t(n)** nelle forme triangolari sia il numero delle candeline **q(n)** nelle forme quadrate al variare del numero **n** con:

- Una tabella
- Una formula
- Un grafico
- Una descrizione verbale

b. Un giorno il Signor Orso rimane molto perplesso, perché l'età del cliente consente entrambe le disposizioni. Quanti anni potrebbe compiere il cliente che gli ha ordinato la torta?
Determinare tutte le possibili soluzioni motivando le risposte.

c. Supponendo che la vita di una persona non superi 110 anni, sono più gli anni in cui il Signor Orso può fare la torta o più quelli in cui si rifiuta?
Motivare le risposte.

Come valutare

Chi sedeva su quei banchi aveva ancora quel reverenziale rispetto per il proprio docente che non si intravede più tra i nostri ragazzi, e aveva imparato, suo malgrado, ad acquisire una disciplina, a rispettare regole, tempi morti, attese, silenzi, a muoversi in spazi ristretti, a sopportare disagi. All'illusione iniziale che all'attenzione corrispondesse un'uguale profondità e rapidità di apprendimento si è sostituita ben presto, tuttavia, la presa di coscienza che quelle che eravamo chiamate a formare erano persone non più allenate allo studio (forse non lo sono mai state), persone dalle menti stanche, come è naturale per studenti non più giovanissimi, provate da un regime di detenzione e, soprattutto in media sicurezza, talvolta da vite dissolute, dall'uso di stupefacenti e dall'abuso di alcolici, e forse, al di là delle apparenze, in alcuni casi nemmeno troppo profondamente motivate o convinte dell'importanza della sfida che andavano affrontando.

Parimenti il sovrapporsi dell'orario scolastico con quello dei turni di lavoro, per alcuni unico mezzo di sostentamento in un mondo nel quale, come accade all'esterno, tutto ha un costo, e unico modo per contribuire, anche se in minima parte, al proprio mantenimento e a quello della propria famiglia, finiva per minare alla radice quel tentativo. A distogliere gli studenti dallo studio contribuivano le lunghe assenze per motivi lavorativi o processuali, la routine della giornata carceraria che si chiude con lo spegnersi delle luci prima delle venti, la permanenza in cella, o in sezione, luoghi abitati da rumori, odori, presenze che mal si conciliano o perlomeno non favoriscono la concentrazione e il momento della rielaborazione personale, indispensabile strumento per acquisire autonomia e sicurezza. La disponibilità all'ascolto finiva spesso dunque per infrangersi proprio contro lo scoglio della valutazione, momento che faceva deflagrare prepotentemente attese, aspettative, contraddizioni di quel luogo.

In quel contesto, più che altrove, la scuola sembrava rispondere sì alla sua vocazione più alta, quella di custode dello spazio di libertà di ogni uomo, restituendo ad ognuno dignità e possibilità di sviluppare le proprie potenzialità, ma faticava a mantenere la rotta, procedeva all'insegna della discontinuità. Misurarsi con quanto imparato, farsi valutare, significa talvolta anche mettersi a nudo, mostrarsi e mostrare le proprie fragilità, i propri limiti, le proprie difficoltà: se quello di imparare è un mestiere difficile quanto quello di insegnare, farlo, *da grandi*, può esserlo ancora di più e rischia di innescare una serie di contrastanti emozioni. La voglia di mettersi in gioco finiva per impastarsi con la timidezza, con il bisogno di gratificazioni, con la paura di fallire, con il pudore di scoprirsi di fronte agli altri – corsisti, insegnanti, educatrici, talvolta la famiglia – chiamati tutti ad osservare ogni passo di quel difficile, tormentato percorso. Se si aggiunge poi che alla scuola spesso, forse anche inconsciamente, chi vive in uno stato di reclusione affida l'appagamento del naturale bisogno di gratificazione, di considerazione che gli viene, quotidianamente, altrimenti costantemente negato si comprendono molte delle dinamiche che il momento della valutazione può innescare: l'abbandono scolastico, le tensioni, il tentativo di sottrarsi alle verifiche, il rifiuto della materia, le richieste continue di supporto durante le prove. Come e cosa valutare dunque? Come ancorare la valutazione a competenze mai o quasi mai acquisite fino in fondo?

Lungo le tante tappe di quel percorso formativo intrapreso insieme a, e a fianco dei nostri corsisti abbiamo maturato la convinzione che fosse necessario solcare altre strade, arrivare per altre vie a quella che, convenzionalmente, definisce la conclusione dell'esperienza didattica. Una applicazione rigida dei parametri consueti di valutazione – memoria, padronanza del calcolo aritmetico e algebrico, padronanza del linguaggio matematico, capacità di risoluzione dei problemi, autonomia risolutiva – avrebbe necessariamente portato fuori rotta quel percorso che sfidava quotidianamente tutte le convinzioni sedimentate di quello che si è abituati a pensare essere l'insegnamento. Da qui l'esigenza di ridimensionare aspettative, richieste, prove, di adeguarsi talvolta ad una visione tradizionale, meccanica, del fare matematica, circoscrivendo gli argomenti sui quali fondare le prove e sui quali verificare le competenze acquisite, senza cedere tuttavia a facili vittimismi, senza sentire svilito il proprio ruolo di docente e la possibilità di comunicare la disciplina, senza mai provare insoddisfazione per quello che eravamo chiamati a fare, senza mai cedere alla tentazione di lasciare il timone, di lasciare che quel luogo e i suoi condizionamenti prendessero il sopravvento, erodendo la nostra voglia di insegnare.

Non si dimentichi inoltre che per i nostri corsisti la scuola costituiva un'occasione preziosa per mantenere un legame con il mondo esterno veicolato, là dentro, altrimenti solo da familiari e da chi era preposto alla loro sorveglianza, e rappresentava uno dei pochi momenti nei quali era per loro possibile instaurare un dialogo costruttivo con persone che stanno al di là di quel muro, ma era altresì, una piccola, piccolissima cosa nelle loro complicate e per noi oscure esistenze. La nostra osservazione ha allora volutamente cercato di comprendere e valorizzare per intero aspetti che competono solo in parte al modo ordinario di intendere la valutazione, ponendo accanto ai parametri tradizionali quegli elementi che ci avrebbero permesso di avere una visione globale di ogni singolo studente. Quel che normalmente è considerato a corollario della valutazione – la partecipazione, l'interesse, l'impegno – è diventato invece l'angolo di prospettiva privilegiato dal quale osservare l'intero percorso. Al centro di tutto, dunque, in questa singolare esperienza, il modo con cui ognuno di loro si è mosso lungo quel tragitto più che la singola conquista, la fatica che è costata ogni meta più che la capacità di vincere la tappa, la costanza con la quale è stata affrontata ogni sfida più che la singola vittoria e, soprattutto, l'intenzione, la convinzione con la quale ognuno di loro ha intrapreso e affrontato la corsa. Non è affatto facile trovare degli strumenti di valutazione per quegli aspetti, trovare un sistema per determinarne il livello, definire il peso di ognuno nel complesso nodo della valutazione, tradurre in un voto, in un numero, il groviglio di idee, giudizi, pensieri, dubbi che si sono maturati mentre si osserva e si impara a conoscere ogni studente, *piccolo* o *grande* che sia. Una cosa, tuttavia, un docente non può non cogliere lungo la via, se e quando avviene: il cambiamento. Così anche a Ranza, qualche volta, in qualcuno si è vista accendersi quella fiammella che dà un senso al nostro insegnare, maturare a poco a poco la consapevolezza dell'importanza di imparare, apprendere, studiare.

Lungi dal voler presentare questa manciata di considerazioni alla stregua di linee guida per l'insegnamento in un contesto detentivo, o queste poche pagine come un *vademecum* della valutazione nell'istruzione per adulti, chiudiamo questa nostra riflessione consapevoli che la nostra osservazione risente di un importante limite, quello della sua durata. La nostra esperienza si riferisce infatti ad un solo anno di insegnamento e si caratterizza per la mancanza di continuità e per l'impossibilità di veder evolversi certe dinamiche, certi comportamenti, certe tendenze che abbiamo saputo cogliere sul nascere ma che non abbiamo potuto seguire nel loro divenire, per l'impossibilità di veder crescere i frutti del nostro lavoro che avevano allora cominciato a germogliare.

Non sapremo forse mai se il nostro operare ha davvero lasciato un segno nei nostri studenti, se ha permesso a quelle fiammelle di continuare ad alimentarsi, se siamo riusciti a trasmettere un po' di passione per le nostre discipline e a lasciare loro qualcosa che va al di là dei singoli contenuti, ma sicuramente sappiamo che noi una cosa l'abbiamo imparata e questa cosa non la si dimentica, che coloro che sin dal primo giorno abbiamo visto diligentemente seduti sui banchi in quelle aulette sono e non hanno mai smesso di essere per noi delle persone, persone che ci hanno affidato in parte il recupero della loro dignità e la custodia dei loro sentimenti e delle loro storie.

Non ci resta allora che concludere con le parole di Agnese:

«Racconto questo solo per far capire che dentro a questi edifici austeri, pieni di sbarre e di cancelli, nascosti agli occhi e alle menti delle persone normali, al resto del mondo insomma, qui dentro, c'è un piccolo universo a parte, fatto di storie, sentimenti, desideri e tanti rimpianti. E la speranza? Sì, c'è anche quella. Pure per me? Forse. In fondo, in fondo»[4].

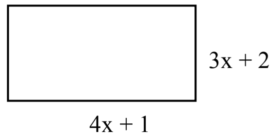
[4] Cfr. *Volete sapere chi sono io?Racconti dal carcere*, a c. di A. Bolelli Ferrera, Milano 2011, pp. 78-79.

Appendice 1

Come conclusione e completamento del percorso svolto nella scuola secondaria di primo grado, si è proposta, per l'esame finale, la seguente prova:

1. Le dimensioni di un rettangolo misurano (3x + 2) e (4x + 1):

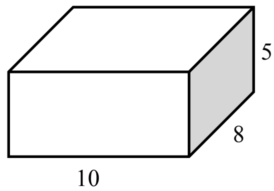
000



a. Esprimere il perimetro e l'area del rettangolo con un'espressione.

b. Quanto deve valere x perché il perimetro misuri 34?

000**2.** Un fermacarte ha la forma di un parallelepipedo a base rettangolare:



Le dimensioni del parallelepipedo sono:
larghezza di base = 10 cm
profondità di base = 8 cm
altezza = 5 cm

a. Calcolare la misura della superficie totale e del volume del fermacarte.
b. L'oggetto è fatto di marmo che ha il peso specifico (ps) uguale a 2,6 g/cm^3, calcolarne il peso.

3. Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità di ottenere come somma dei punti dei due dadi:

a. 3;

b. 7 o 11.

4. Si chiede a 20 persone il numero di ore passate davanti al computer in una giornata.
Questi sono i dati raccolti: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6

Completa la tabella sottostante:

Numero ore	2	3	4	5	6
Frequenza assoluta					
Frequenza relativa					
Percentuale					

calcola, poi, la media delle ore passate davanti al computer e indica la moda e la mediana.

20.02.20[illegible]

Semina, semina: l'importante è seminare, poco, molto, tutto il grano della speranza.
Semina il tuo sorriso perché splenda intorno a te.
Semina le tue energie per affrontare le battaglie della vita.
Semina il tuo coraggio per risollevare quello altrui.
Semina il tuo entusiasmo, la tua fede, il tuo amore.
Semina le più piccole cose, i nonnulla.
Semina e abbi fede e ogni chicco arricchirà un piccolo angolo della Terra.

Grazie per la tua pazienza,
Grazie per il coraggio e la speranza che mi dai nello studiare, Grazie!!!

Con Stima e tanto Rispetto

Appendice 3 Chi vince il festival di Sanremo?

Martedì 9 Febbraio 2016	Quote	Probabilità	%	% netta	Quote nette
Iurato & Caccamo	**3**	0,3333	33%	19%	**5**
Noemi	**5**	0,2000	20%	12%	**9**
Alessio Bernabei	**8**	0,1250	13%	7%	**14**
Enrico Ruggeri	**25**	0,0400	4%	2%	**43**
Arisa	**16**	0,0625	6%	4%	**28**
Rocco Hunt	**20**	0,0500	5%	3%	**35**
Dear Jack	**50**	0,0200	2%	1%	**87**
Stadio	**20**	0,0500	5%	3%	**35**
Lorenzo Fragola	**5,5**	0,1818	18%	10%	**10**
Annalisa	**8**	0,1250	13%	7%	**14**
Irene Fornaciari	**66**	0,0152	2%	1%	**115**
Neffa	**66**	0,0152	2%	1%	**115**
Zero Assoluto	**50**	0,0200	2%	1%	**87**
Dolcenera	**10**	0,1000	10%	6%	**17**
Clementino	**40**	0,0250	3%	1%	**70**
Patty Pravo	**16**	0,0625	6%	4%	**28**
Valerio Scanu	**16**	0,0625	6%	4%	**28**
Morgan E Bluvertigo	**50**	0,0200	2%	1%	**87**
Francesca Michielin	**13**	0,0769	8%	4%	**23**
Elio E Le Storie Tese	**6,5**	0,1538	15%	9%	**11**
Totale		1,7387	174%	100%	

Giovedì 11 Febbraio 2016	Quote	Probabilità	%	% netta	Quote nette
Iurato & Caccamo	**3**	0,3333	33%	19%	**5**
Noemi	**8**	0,1250	13%	7%	**14**
Alessio Bernabei	**20**	0,0500	5%	3%	**36**
Enrico Ruggeri	**25**	0,0400	4%	2%	**45**
Arisa	**20**	0,0500	5%	3%	**36**
Rocco Hunt	**15**	0,0667	7%	4%	**27**
Dear Jack	**25**	0,0400	4%	2%	**45**
Stadio	**7**	0,1429	14%	8%	**13**
Lorenzo Fragola	**7**	0,1429	14%	8%	**13**
Annalisa	**6**	0,1667	17%	9%	**11**
Irene Fornaciari	**100**	0,0100	1%	1%	**180**
Neffa	**80**	0,0125	1%	1%	**144**
Zero Assoluto	**80**	0,0125	1%	1%	**144**
Dolcenera	**20**	0,0500	5%	3%	**36**
Clementino	**20**	0,0500	5%	3%	**36**
Patty Pravo	**10**	0,1000	10%	6%	**18**
Valerio Scanu	**20**	0,0500	5%	3%	**36**
Morgan E Bluvertigo	**80**	0,0125	1%	1%	**144**
Francesca Michielin	**7**	0,1429	14%	8%	**13**
Elio E Le Storie Tese	**5**	0,2000	20%	11%	**9**
Totale		1,7977	180%	100%	

Bibliografia e sitografia

C. Bertinetto et al., *Contaci!*, Zanichelli, 2012

A. Bolelli Ferrera, a c. di, *Volete sapere chi sono io?Racconti dal carcere*, Milano, Mondadori, 2011

A. Paenza, *Non si può dividere per zero. Storie di matematica da passeggio*, Milano, Bollati Boringhieri, 2011

C. Scaglioso, *Il carcere, le vie dell'educazione*, Guerra Edizioni, 2008

UMI-CIIM, *Matematica 2001-materiali per un nuovo curriculo di Matematica...*, http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/

LA CLASSE MULTICULTURALE: UNA NUOVA SCOMMESSA DIDATTICA

Maria PICCIONE
Università degli Studi di Siena, Siena

Riassunto

Nell'ambito della ricerca didattica collegata al tema "Matematica e Difficoltà", si è definita negli ultimi anni una nuova istanza emergente da una particolare forma di inclusione scolastica, quella originata dall'inserimento nelle classi di allievi provenienti da paesi stranieri (allievi di prima o eventualmente di seconda generazione). Questo lavoro prende avvio da una breve descrizione quantitativa dell'avvenuto cambiamento e da un'analisi qualitativa delle caratteristiche dell'ambiente scolastico multiculturale. Mira principalmente a prospettare un rinnovamento metodologico adeguato al contesto attuale; in coerenza con esso, è presentata un'attività svolta in due classi di Scuola Secondaria di primo grado, con indicazioni e commenti sulle scelte operate e su alcuni risultati ottenuti nella sua realizzazione.

Introduzione

Nel nostro Paese il fenomeno dell'immigrazione rappresenta ormai una realtà diffusa e stabile che interessa sensibilmente il contesto sociale a partire dal mondo della scuola. Il cambiamento della società che si è verificato ha infatti prodotto, in tempi assai rapidi, un'importante trasformazione della struttura scolastica, che ha determinato un incisivo aumento delle discrepanze all'interno dei gruppi-classe e, di conseguenza, generato problemi didattici nuovi e posto nuove sfide educative. In questa particolare situazione, l'insegnamento fondato sulla trasmissione di contenuti *insegnante-allievi* entra davvero in una crisi ineludibile. I contributi specifici della ricerca sono ancora piuttosto limitati ed hanno permeato il tessuto scolastico in piccola parte, sicché gli interventi significativi sono di fatto dovuti alla sensibilità e alla dedizione professionale di singoli docenti e dirigenti. Peraltro, il notevole sviluppo della riflessione psico-pedagogica e didattica contemporanea offre una ricchezza di riferimenti teorici e modelli di buone pratiche ai quali è possibile attingere proficuamente per la definizione di principi e la progettazione/sperimentazione di percorsi formativi adeguati a rispondere alle esigenze che la scuola attualmente manifesta. Siamo di fronte ad una situazione complessa alla quale però è bene guardare positivamente, come ad "un'occasione per ripensare e rinnovare l'azione didattica a vantaggio di tutti, un'occasione di cambiamento per tutta la scuola" in accordo con quanto è auspicato nelle *Linee guida per l'accoglienza e l'integrazione degli alunni stranieri* (CM 4233 del 19 Febbraio 2014).

Un'immagine della situazione scolastica in Italia

Dai primi anni Novanta ad oggi, la scuola italiana ha visto trasformarsi il fenomeno dell'inserimento di alunni stranieri nelle classi da situazione di emergenza a realtà consolidata. È possibile affermare, come titolano frequentemente anche i quotidiani nazionali, che la nostra scuola è divenuta sempre più *multiculturale*. I rapporti annuali (elaborati dal MIUR ed altri enti) consentono di analizzare nei dettagli l'evoluzione e la natura del cambiamento della popolazione scolastica nel nostro Paese. Una simile analisi esula dai nostri obiettivi; riporteremo comunque alcuni dati per fornire un'immagine, seppure sommaria, delle proporzioni di questa realtà.

Presenze. Nell'ultimo ventennio, la presenza degli alunni con cittadinanza non italiana negli istituti statali è cresciuta costantemente, passando da meno di 44.000 unità nell'anno scolastico 1994/95 ad oltre 800.000 (più della metà dei quali nati in Italia) nel 2015/16, ovvero dalla percentuale dello 0,6% a quella del 9,2%. I dati risultano più significativi quando acquisiscono caratteri meno generali. Infatti, esiste una differenza tra i vari livelli di scolarità, secondo la quale nelle Scuole dell'Infanzia, Primaria e Secondaria di primo grado l'incidenza tocca il 10,4%, mentre è intorno al 7% nella Scuola Secondaria di secondo grado e aumenta negli indirizzi tecnici e professionali fino al 12,6%, per salire ulteriormente nei corsi di formazione serali. Guardando ai singoli istituti, in quasi tremila di questi, gli studenti stranieri sono almeno il 30% degli iscritti e, in oltre cinquecento, superano il 50%. Infine, rivolgendo l'attenzione alle province, Prato, Piacenza, Reggio Emilia, Brescia e Mantova occupano i primi posti per la più alta percentuale di scuole ad elevata presenza di alunni con background migratorio.

Provenienza. In tutti gli ordini e gradi della scuola, gli alunni con cittadinanza romena sono i più numerosi, seguiti da albanesi e marocchini; molti meno sono i cinesi e filippini. Ma la popolazione degli stranieri in Italia è assai eterogenea ed ogni continente (tranne l'Oceania) è rappresentato anche nella scuola! In particolare, in quella dell'Infanzia è divenuto rilevante il numero di bambini bengalesi.

Risultati scolastici. A causa delle oggettive difficoltà, i figli degli immigrati manifestano disagio scolastico e sono a rischio di dispersione: i dati relativi allo scorso anno mostrano una diminuzione dei risultati scolastici insufficienti, rispetto agli anni passati, ma il problema rimane serio, come si evince dal fatto che quasi il 50% dei quattordicenni e il 62% dei quindicenni risultano in ritardo.

Caratteristiche della classe multiculturale

Come ogni insegnante ben sa, una classe è per se stessa un sistema di *differenze inter-individuali* che, coesistendo, si confrontano e si influenzano reciprocamente. Altrettanto noto è che il prodotto di questa azione reciproca dipende in modo decisivo dall'adulto che guida il gruppo-classe, tanto che il medesimo gruppo può assumere corpi e aspetti comportamentali di carattere (anche molto) diverso secondo la diversa conduzione. Nella classe multiculturale l'elemento che viene accentuato è proprio quello delle differenze tra i soggetti che la compongono, fatto che rende ancora più complessa la "scommessa" didattica ed educativa insieme. Individuare i fattori dai quali ha origine la *disomogeneità* tra gli allievi stranieri e distinguerli in categorie è semplice. Anche dalla nostra analisi, sono apparse anzitutto determinanti le esperienze di vita che hanno preceduto la migrazione, segnate da condizioni di sofferenza e precarietà, talvolta gravi, e quelle, pur sempre problematiche, dovute all'inserimento nel paese di accoglienza. Unite a queste, vanno considerate le esperienze scolastiche pregresse avvenute in sistemi educativi diversi dal nostro; inoltre, i costumi della cultura di provenienza; infine, i diversi livelli di conoscenza della lingua italiana. Altra componente che interviene riguarda la vita extrascolastica dei ragazzi, condizionata dallo stato socio-culturale-economico delle famiglie di appartenenza, spesso poco aperte all'integrazione nel nuovo ambiente e sprovviste di tempo, sensibilità e strumenti adatti a sostenere il percorso scolastico dei figli. Sono tutti presupposti che implicano difficoltà, le quali rappresentano, questa volta, un *tratto condiviso*. Infatti, seppure con manifestazioni e intensità diverse, molti di questi allievi soffrono di forme di *disagio emotivo-relazionale*: principalmente, tendono all'isolamento, sono poco fiduciosi in sé stessi o indifferenti all'attività, incapaci di tempi di attenzione/partecipazione adeguati; talvolta, danno segni di insofferenza, fino al rifiuto delle normali regole di comportamento e al compimento di azioni di disturbo. La ricerca scientifica nel settore dell'*Affect* ha da tempo dimostrato l'influenza dei fattori affettivi nei processi cognitivi e quindi indirizzato e promosso il lavoro su questi (per individuazione, acquisizione di consapevolezza, controllo, …) come un fronte dell'impegno didattico. La disponibilità all'investimento delle risorse personali e i conseguenti possibili progressi sul piano cognitivo da parte di un allievo sono infatti un riflesso della qualità del *sistema di relazioni* che egli è in grado di intessere e sviluppare con i compagni, i professori, le discipline, all'interno dell'ambiente scolastico, con i genitori ed altre figure, all'esterno e pure con sé stesso. Per gli studenti stranieri, il *disagio cognitivo* che si manifesta nelle varie attività (lettura, interpretazione del testo, scrittura, problem-solving, calcolo, …) è un risultato inevitabile del faticoso processo di adattamento all'ambiente "estraneo". Infatti, i deficit cognitivi specifici si presentano con incidenza del tutto analoga a quella della popolazione autoctona. In accordo con altre indagini (Murineddu, Duca, Cornoldi, 2006), anche il nostro lavoro ha individuato nella scarsa padronanza dell'Italiano come seconda lingua (in certi casi, assente) l'ostacolo primario che si frappone all'apprendimento, perché inficia la piena fruizione delle opportunità offerte dalla vita e dall'attività scolastica. Infatti, i problemi di apprendimento si riducono notevolmente o cessano con l'acquisizione della nuova lingua e il reale avvio dell'integrazione. Quando il disagio affettivo/cognitivo permane tra gli studenti immigrati di prima generazione o si manifesta tra quelli di seconda generazione, è di nuovo una conseguenza della chiusura al contesto sociale delle singole famiglie, o più spesso dell'intero gruppo etnico, e della incapacità o impossibilità degli adulti a seguire l'esperienza scolastica dei loro figli. L'influenza della situazione familiare è comprovata dal fatto che problemi di tipo affettivo/cognitivo del tutto analoghi sono frequenti anche tra allievi italiani che provengono da un ambiente povero di stimoli e strumenti.

Nuovi compiti per gli insegnanti.

Quanto detto definisce l'effettivo problema didattico di fronte al quale si trovano gli insegnanti nelle classi multiculturali, ovvero, come abbiamo visto, nelle classi attuali. Rifacendosi ad una visione gestaltica, le condizioni di crisi o di bisogno generano spontaneamente uno stato di attivazione e una spinta verso il loro superamento, attraverso processi di cambiamento e riorganizzazione della situazione iniziale che conducono a un progresso del sistema. Forse saranno proprio le necessità dettate dalla conduzione delle nuove classi a sollecitare ed incrementare nel nostro Paese il rinnovamento della didattica che, in modo lento ma costante, sta affermandosi e diffondendosi, in particolare per quanto riguarda la matematica. Il primo passo da compiere, oggi, da parte di un educatore è una rivisitazione autentica della concezione del ruolo personale e del ruolo della disciplina nell'attività educativa, che conduca ad una interpretazione dell'insegnamento subordinata a una *nuova interpretazione dell'apprendimento.* Sarà questa nuova visione a determinare le scelte didattiche che saranno operate e i modelli che verranno adottati. Nell'ultimo ventennio, le scuole di specializzazione, i numerosi corsi di formazione, i convegni e le pubblicazioni hanno favorito la riflessione e l'approfondimento teorico sia nell'ambito della didattica generale che disciplinare. Anche l'ampia possibilità di documentazione in rete ha rappresentato e rappresenta una risorsa per l'acquisizione e il confronto di idee.

La politica ministeriale ha tenuto in debita considerazione il problema: dal 2006 ha mantenuto un impegno costante nel dare orientamenti sul piano culturale ed educativo, stabilire normative, assegnare mezzi per favorire l'integrazione e la riuscita scolastica/formativa degli alunni stranieri. Sono state messe a disposizione anche nuove *Linee Guida* generali per l'accoglienza e l'integrazione degli alunni stranieri, pubblicati Rapporti conoscitivi, e adottate misure efficaci, quali interventi di sostegno nel settore linguistico (sia per il potenziamento dell'Italiano come lingua seconda che per la produzione di materiali didattici per le materie di studio in Italiano L2) e progetti di sostegno psicologico.
I docenti hanno dunque obiettivi definiti e strumenti adatti ad avviare la trasformazione; resta loro da condividere, collegio per collegio, la volontà di affrontare la sfida e di promuovere il rinnovamento con coesione e supporto reciproco.

Orientamenti metodologici

Abbiamo già individuato nella disomogeneità la caratteristica d'insieme della classe multiculturale ed evidenziato che essa riguarda i livelli di sviluppo dei diversi soggetti sotto i vari aspetti: relazionale, affettivo, cognitivo (a partire da capacità di adattamento al gruppo, disponibilità al lavoro, modalità di comunicazione, …). La conseguenza è la *complessità del sistema*, con istanze che indicano come punto di arrivo un'impostazione della *didattica di tipo personalizzabile* (Coin, 2013). Varie metodologie ormai ben affermate indicano strategie adatte a raggiungere questo risultato, peraltro come "effetto secondario" di obiettivi educativi più generali e nodali che attendono di essere perseguiti, anche indipendentemente dal multiculturalismo. Ci riferiamo, con prospettiva costruttivista, al *learning by doing,* al *cooperative learning*, al *sensorimotor approach,* enfatizzando l'uso di materiale strutturato, anche secondo la via italiana segnata dai metodi Montessori e Castelnuovo. Negli ultimi anni, si sta affermando lo studio delle possibili applicazioni in ambito didattico di una teoria della conoscenza abbastanza recente, l'*enattivismo*[5], connessa alla biologia e a filosofie dell'esperienza, dalla quale potrà emergere un nuovo quadro di riferimento. Il *modello enattivo,* che si va definendo e che trae conferme dai continui traguardi raggiunti dalle neuroscienze, si accorda con i principi delle metodologie citate, anzi di fatto le integra. Esso si fonda su due assunti di base, dai quali segue l'interpretazione della conoscenza come *attività incorporata e ambientata*:

- il soggetto è un essere vivente capace di auto-produrre componenti (aventi natura di processi) che si incarnano in esso;
- le trasformazioni che il soggetto compie su sé stesso hanno origine dalle relazioni tra l'ambiente esterno e le strutture individuali interne allo stato in cui sono.

In coerenza con questi principi, l'approccio enattivo si centra sul soggetto con le sue esperienze pregresse e sulle azioni che esplica nell'ambiente; pertanto, richiede all'educatore di concentrarsi sulla creazione di ambienti adatti a favorire l'azione e l'esperienza individuale (in particolare, corporea) in un contesto sociale che privilegi il confronto tra pari. L'empatia è una componente relazionale da sviluppare. Il sistema che si crea offre la possibilità a ciascun soggetto di compiere processi cognitivi anche in presenza di difficoltà linguistiche e di sviluppare il linguaggio stesso come risultato concomitante all'attività condivisa del *sense-making.* La conoscenza è costruita insieme

[5] La teoria ha preso avvio dai lavori di due biologi Maturana e Varela (1984) ed è stata esplicitamente proposta da Varela, Thompson and Rosch (1991).

ad altri soggetti, attraverso un percorso dinamico che coinvolge tutti, allievi e insegnante. Questa interpretazione dell'apprendimento interessa in modo naturale la *valutazione*, che si allontana molto dalla modalità dei parametri fissi e limitati delle sue espressioni standard per divenire una componente del processo educativo, attiva con continuità, flessibilità e versatilità. Essa acquisisce il senso profondo di strumento volto allo *sviluppo di consapevolezza* su "che cosa", "come" e "verso dove" l'attività si svolge, sia per l'insegnante che per l'allievo. Da entrambe le parti, tale consapevolezza sostiene il controllo dei processi di insegnamento e di apprendimento e li favorisce; in particolare, serve all'insegnante per regolare l'intervento didattico e, all'allievo, per aumentare la percezione del suo coinvolgimento personale. I molteplici aspetti (affettivi e metacognitivi oltre che cognitivi) di cui la valutazione, così intesa, deve tenere conto, e i vari piani relazionali ai quali essa deve rivolgersi (insegnante-allievo, allievo-allievo, insegnante-insegnante, allievo-gruppo, ecc.) ne determinano la indiscutibile complessità. Ad esempio, riguardo a un compito e sul piano insegnante-allievo essa comprende:

- verifica dell'adeguatezza del compito assegnato;
- controllo della comprensione da parte dei ragazzi della natura del compito;
- osservazione dei comportamenti manifestati da ciascun allievo in relazione al compito in quanto oggetto di confronto personale;
- osservazione delle strategie attuate;
- analisi e condivisione delle risposte;
- apprezzamento di ogni prodotto ottenuto o progresso compiuto; …

L'impostazione qui sintetizzata ha le prerogative per adattarsi, in particolare, alle esigenze poste dalla nuova situazione scolastica. Indubbiamente, essa comporta un cambiamento radicale, prima a livello di concezioni e poi di pratiche, che ne rende difficile l'adesione e l'attuazione immediata: non è naturale passare dalla consueta modalità della comunicazione dichiarativa ad una nuova modalità che affida al rapporto *allievo-ambiente strutturato* la mediazione culturale. I risultati sarebbero a favore di tutti.

Un'esperienza didattica

Spunti significativi di riflessione intorno al tema trattato sono emersi dalla sperimentazione di una proposta didattica[6] – intitolata **"Una fabbrica di triangoli" –** che ha avuto luogo in due classi prime della Scuola Secondaria di primo grado "Gandhi" (Firenze), composte, rispettivamente, da 22 studenti (6 immigrati e 5 con difficoltà generiche) e 21 studenti (7 immigrati e 5 con difficoltà generiche).
La proposta è finalizzata alla costruzione del concetto di forma triangolare ma, per sua struttura, è orientata, più in generale, a favorire processi di visualizzazione, di matematizzazione, a sviluppare abilità di rappresentazione grafica ed espressione linguistica. Prevede due fasi:

- la prima è costituita da una situazione a-didattica, nella quale i ragazzi prendono familiarità con il materiale e realizzano *composizioni libere*;

[6] Il lavoro qui riportato fa parte delle attività svolte nell'ambito del Progetto Comenius "*Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language*" (2012-'15). Per approfondimenti, si rimanda alla sezione Teaching Materials nel sito del Progetto medesimo, dove esso è consultabile insieme ad altre proposte.

- la seconda ha funzione costruttiva, indirizzata alla concettualizzazione di figura trilatera, in particolare di triangolo, con le proprietà fondamentali legate alle condizioni di esistenza e unicità (ovvero, disuguaglianza triangolare e criteri di congruenza).

L'idea seminale del lavoro è quella di verificare la possibilità di realizzare processi cognitivi attraverso l'azione del soggetto (*interiorizzazione operativa)* a partire dal reale stadio individuale (*continuità di apprendimento)* in una situazione di autonomia (*riduzione dell'intervento verbale* da parte dell'insegnante).
L'approccio didattico è ispirato al metodo Castelnuovo, del quale viene adottata parte del materiale (costituito da semplici asticelle, ganci e nastri) per la realizzazione di modelli dinamici (Fig. 1).

Figura 1. Il materiale usato per l'attività

Il lavoro è improntato alla collaborazione tra pari; si svolge:

- a coppie o in piccoli gruppi, durante la costruzione dei modelli, la riproduzione grafica delle composizioni realizzate, la stesura di osservazioni o di risposte a quesiti, la soluzione di problemi;
- a classe intera, durante la discussione/confronto dei risultati ottenuti.

Il percorso è progettato in modo da favorire la partecipazione di ogni studente alle attività, almeno a quelle di esplorazione tattile e visiva di oggetti reali e di espressione grafica. Lo sviluppo del linguaggio è prevalentemente delegato alla comunicazione tra pari nell'atto di *dire/cercare di dire ciò che ognuno sta facendo e vedendo* durante la manipolazione delle figure concrete e le loro conseguenti trasformazioni.
L'analisi a posteriori ha permesso di evidenziare l'efficacia – da vari punti di vista – dell'azione didattica così strutturata, anche in relazione allo specifico contesto di attuazione.
Cominciamo dagli aspetti emotivo-relazionali. Il clima sereno, finanche gioioso, ha accompagnato tutta l'esperienza, il cui carattere, ampiamente manipolatorio e creativo, ha determinato condizioni di coinvolgimento e mantenimento dell'attenzione generali. Vale la pena di evidenziare due casi emblematici.
"Occhi-mani" è il primo. Osservato proprio all'inizio dell'attività, si riferisce ad un bambino (cinese) privo di conoscenza della lingua italiana, che si era isolato, in piedi, in un angolo della stanza lontano dai banchi intorno ai quali i ragazzi si erano distribuiti. È stato amorevolmente incoraggiato a prendere consapevolezza dei suoi occhi e delle sue

mani e ad affidarsi a questi strumenti. Allora si è seduto ad un banco con altri compagni e ha cominciato a realizzare le sue figure insieme a loro. Da quel momento, lo abbiamo chiamato "occhi-mani"; rispondeva sorridendo! Il senso di auto-efficienza si era un po' affermato ...

"Non voglio" è il secondo. Rilevato durante la fase di esplorazione della duplice possibilità di apertura/chiusura della struttura trilatera, riguarda una bambina (di nuovo cinese) che negava, solo col ripetuto e deciso movimento della testa, di voler fare le prove con le configurazioni. Dopo ogni nostra sollecitazione, tornava, immobile, a guardare un punto sulla parete, dal suo banco dove voleva stare da sola. Alla fine, operando con calma e in silenzio accanto a lei e per lei, ha scritto due monosillabi a fianco di due disegni ottenuti ricalcando le corrispondenti configurazioni: "sì", "no", intendendo "si chiude", "non si chiude". Episodio determinante che ha segnato l'inizio di un atteggiamento diverso!

L'osservazione dei comportamenti e delle produzioni dei ragazzi lungo il percorso ha consentito la <u>rilevazione di discrepanze cognitive</u> tra loro. A due estremi opposti, ad esempio, hanno mostrato di essere due allievi: l'uno incapace di riprodurre graficamente una configurazione di aste che gli era nata tra le mani (esagono intrecciato), difficoltà superata grazie ad una analisi tattile eseguita molto lentamente, lato dopo lato sotto la guida dell'insegnante (Fig. 2); l'altro, in grado di elaborare correttamente una procedura combinatoria per risolvere il problema di quanti triangoli diversi si possono costruire con cinque bastoncini di lunghezze date.

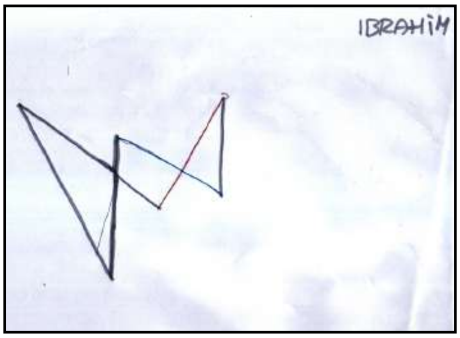


Figura 2. Disegno dell'esagono intrecciato

Inoltre, sono state confermate le potenzialità del lavoro col "meccano geometrico" nel promuovere il <u>processo di matematizzazione</u>. Ci limiteremo ad alcune note intorno alla scoperta della disuguaglianza triangolare. Per la raccolta di osservazioni scritte, è risultata assai efficace la richiesta posta in questa forma: *"Io vedo che ..."*. Le risposte dei ragazzi hanno dato interessanti indicazioni. Anzitutto, hanno indotto ad attribuire alle asticelle il valore di *artefatto* in grado di evolvere nel concetto di "segmento", rappresentato dal segno linguistico "lato". Inoltre, le espressioni usate hanno segnato la traccia di un processo cognitivo spontaneo che è avvenuto in tre tempi: dalla percezione dei diversi ruoli interpretati dalle tre stecche (dipendenti dai gradi di libertà posseduti) – ruoli sottolineati da nomi diversi – alle operazioni di confronto e valutazioni metriche, verso la conclusione, determinata dal potente supporto della configurazione inattesa (il caso del triangolo degenere) che porta a realizzare concretamente la "somma di due lati" e a metterla in relazione col terzo. Per seguire questa evoluzione si riportano (fedelmente) alcune frasi:

“Si chiudono perché hanno i lati tutti delle misure diverse. Non si chiudono perché non si possono unire i lati. Si sovrappongono perché hanno la base più lunga e i lati più corti”;
“Si sovrappone quando ha un’asticella grande, una media e una piccola che combaciano. Non si chiude quando le asticelle sono sproporzionate. Si chiude quando le asticelle sono proporzionate”;
“Si chiude quando i due punti di incontro residui si incontrano. Non si chiude quando i due punti di incontro residui non si incontrano. Si sovrappone quando i due lati residui sono complementari al primo”;
“La figura si chiude quando i lati sono uguali. La figura non si chiude quando i lati hanno misure diverse. La figura si sovrappone quando due lati insieme formano la lunghezza di quello più lungo”.
In ultimo, dal punto vista metaffettivo e metacognitivo, l’attività ha mostrato di lasciare un’impronta determinante per lo sviluppo di consapevolezza sulle mutue relazioni *agire-sentire-comprendere* e *comprendere-spiegare*, che costituiscono l’essenza corposa della costruzione del sapere e del pensiero individuale.

Riferimenti bibliografici e sitografici

CANEVARO A., 2013, Scuola inclusiva e mondo più giusto, Trento: Erickson
CASTELNUOVO E., 1963, Didattica della Matematica, Firenze: La Nuova Italia
COIN F., 2013, Didattica enattiva: cos’è e cosa può fare, ‘Formazione e Insegnamento’, XI 4, pp. 127-133, Brescia: Pensa Multimedia
FAVARO G., 2011, A scuola nessuno è straniero. Insegnare e apprendere nella scuola multiculturale, Firenze: Giunti universale scuola
FURINGHETTI F. & MENGHINI M., 2014, The role of concrete materials in Emma Castelnuovo’s view of mathematics teaching, ‘Educational Studies in Mathematics’, 87 pp. 1-6, Dordrecht: Springer
MURINEDDU M., DUCA V., CORNOLDI C., 2006, Difficoltà di apprendimento scolastico degli alunni stranieri, ‘Difficoltà di apprendimento’, 12, 1, 49-70, Trento: Erickson
ONGINI V., 2011, Noi domani. Un viaggio nella scuola multiculturale, Bari: Editori Laterza
ROSSI P.G., 2011, Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente, Milano: Franco Angeli
ZAN R., 2007, Difficoltà in Matematica: osservare, interpretare, intervenire, Milano: Springer
NÚÑEZ, R. E. & EDWARDS, L. D. & MATOS, J. F., 1999, Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. ‘Educational Studies in Mathematics’, 39, pp. 45-65, Dordrecht: Springer.
http://m3eal.dm.unipi.it, Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language – M^3 EaL– (Project n.526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP)
www.istruzione.it/allegati/2014/linee_guida_integrazione_alunni_stranieri.pdf
www.istruzione.it/allegati/2016/Rapporto-Miur-Ismu-2014_15.pdf
www.istruzione.it/allegati/2016/Piano_Formazione_3ott.pdf

Ringraziamenti
Sono grata alla Dirigente dell’Istituto “Gandhi” di Firenze, Prof. Silvia Di Rocco, per aver aderito al Progetto M^{3}EaL, ai Professori Angela Scialpi e Giovanni Sallustio per aver sostenuto operosamente e fiduciosamente l’attività sperimentale e ai ragazzi delle classi IE e IC con i quali ho verificato la possibilità di armonizzare le differenze interculturali in un campo di prova comune.

ISBN 9791220029582

Composizione grafica e tipografica dei testi a cura di Chiara Cateni

http:/ / www.grimed.net
e-mail: grimed2@gmail.com