

Una certa idea di Matematica

Brunetto Piochi

*Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Università di Firenze*

Riassunto

Si propone una riflessione su cosa significhi insegnare e apprendere la matematica, a partire da quanto elaborato dal GRIMED nei suoi quasi venti anni di attività. La riflessione sulle difficoltà degli studenti ci ha in effetti guidato verso una idea della matematica che risulta molto coerente con il quadro internazionale e che richiede modalità di valutazione diverse da quelle consuete.

Parole chiave: Difficoltà di apprendimento, Matematica, Valutazione

Summary

We offer some hints about teaching and learning mathematics, following the main ideas collected by GRIMED in its almost twenty-years old work. The reflection on students' difficulties in fact led us to an approach to mathematics that is highly consistent with the international one and which yields different approaches to evaluation than usual

Key words: *Learning difficulties, Mathematics, Assessment.*

Introduzione

Dopo quasi venti anni di attività del GRIMED, abbiamo ritenuto opportuno provare a riassumere sistematicamente le idee che si sono sviluppate in questi anni nella nostra Associazione sui temi di cui ci interessiamo: l'insegnamento e apprendimento della matematica con alunni in difficoltà. Come è noto, i problemi di apprendimento riguardanti questa disciplina sono in aumento e riguardano in misura simile alunni che presentano deficit specifici e alunni svantaggiati per motivi sociali o familiari o per precedenti esperienze scolastiche negative. È del resto esperienza condivisa di chi opera nella scuola il constatare una rapida diminuzione della capacità di attenzione, osservazione e riflessione e un contemporaneo aumento del disagio sociale e psicologico da parte degli allievi in tutte le società avanzate.

Cercherò di sviluppare questa mia riflessione sulla base di alcuni "postulati", ovvero convinzioni a partire delle quali questa Associazione ritiene si debba operare un intervento che voglia essere significativo e efficace per una effettiva integrazione, a vantaggio sia dei singoli studenti che della scuola e della società in generale.

Da tali "postulati" segue una ben precisa idea sulla didattica e sulla stessa matematica; peraltro l'idea di matematica che ne consegue viene a coincidere (a mio parere non casualmente) con quella che negli anni recenti si è imposta internazionalmente come la più "sensata" per l'insegnamento. Essa, come vedremo, è coerente con le impostazioni che presiedono ai test proposti dall'OCSE-PISA, con le prese di posizione di organismi come l'UMI-CIIM¹ e anche (con qualche differenza dovuta alla difficoltà di combattere tradizioni consolidate) con le recenti proposte del MIUR in tema di programmi di insegnamento.

Infine mi porrò il problema di come valutare all'interno di questa idea di matematica. La valutazione, tema dell'edizione 2011 del nostro Convegno Nazionale dopo esserlo stato del

¹ UMI, Unione Matematica Italiana, è l'associazione che riunisce i matematici in Italia. Una sua commissione permanente, la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) si occupa dei problemi connessi all'insegnamento e apprendimento della materia nei diversi livelli scolastici.

Seminario dell'anno precedente, non può mai essere considerata astrattamente: si valuta a partire da una idea epistemologica della disciplina² e da una idea di scuola³. Pertanto cercherò di indicare alcune prospettive che permettano una valutazione coerente con le idee di seguito esposte.

I “Postulati”

P1. Il soggetto dell'insegnamento / apprendimento è unitario

L'alunno non è “parcellizzabile” fra le discipline: tutte le discipline concorrono alla sua crescita. Ciò implica una visione sistemica dell'insegnamento, dove la trasversalità ha un suo ruolo cruciale.

P2. Lo studente va a scuola per imparare, all'interno di un sistema globale dinamico.

La prima parte dell'affermazione potrebbe sembrare ovvia, ma forse non lo è in presenza di dibattiti anche autorevoli sull'opportunità di rivedere le politiche dell'integrazione scolastica (CANEVARO, 2010). In realtà l'insegnamento-apprendimento è un meccanismo complesso. Per imparare, infatti, la scuola richiede all'allievo (che “non sa”) e al docente (che almeno teoricamente “sa”) la costruzione di una relazione asimmetrica ma reciproca, dove ognuno dei due attori è chiamato a una continua negoziazione di significati (BRUNER, 1992) e di processi per rendere effettivo tale apprendimento.

In questo quadro lo studente, in quanto soggetto in evoluzione continua, per realizzare questa evoluzione deve poter vivere una situazione dinamica e non essere irrigidito in “classificazioni” prefissate. La difficoltà di apprendimento (e anche la stessa disabilità) va considerata una delle tante situazioni dell'esistenza; essa non deve impedire l'apprendimento e l'utilizzo “al massimo livello possibile” della matematica quanto di ogni altra disciplina

P3. La Matematica è essenziale nel percorso di crescita autonoma e sociale della persona e per lo sviluppo di tutta la società.

La matematica è infatti una “scienza dell'uomo”, prodotto culturale di una intelligenza che si presenta come un *unicum*; in quanto tale non può essere vista come qualcosa di estraneo alla crescita del singolo e della società. Occorre staccarsi da una ideologia che vede la “cultura” sul versante umanistico e la matematica o la scienza sul versante tecnico, qualunque dei due aspetti si ritenga più importante. D'altra parte la stessa conquista dell'autonomia personale non può prescindere dal possesso di (almeno) alcune competenze matematiche e, parimenti, l'esercizio della democrazia in una società complessa non può trascurare la padronanza ad esempio di conoscenze grafiche o statistiche o di abilità argomentative, aspetti collegabili entrambi in maniera diretta alla matematica.

Quale Matematica?

Crediamo che da questi postulati si ricavi una idea ben precisa di matematica:

- un oggetto sociale, da “condividere” con altri al pari di ogni altro sapere,
- uno strumento che serva a collegare / modellizzare / interpretare / comunicare,
- un mezzo essenziale all'autonomia personale e all'esercizio della cittadinanza.

Dunque una matematica dove la sintassi è secondaria rispetto alla semantica, dove le formule sono mezzi e non fini, dove anche la mediazione narrativa (il riferimento ai lavori di Bruner è d'obbligo)

² Si consideri ad esempio la seguente domanda: *Ai fini della valutazione finale, sono più importanti le abilità di calcolo o la capacità di argomentare?* Essa potrebbe essere formulata anche così: *La parte significativa della matematica è più legata all'aritmetica-algebra o alla logica e alle dimostrazioni?* O se preferiamo: *Si insegna/studia la matematica per poterla usare nei calcoli del quotidiano o per imparare a impostare un ragionamento corretto?* Il guaio è che anche coloro che scelgono la seconda alternativa in queste ultime domande, poi molto spesso fondano la propria valutazione sulla prima, basandosi sulle capacità di risoluzione di espressioni o calcoli numerici o algebrici...

³ Il contratto didattico (BROUSSEAU, 1986) riguarda anche gli insegnanti!

è centrale per l'apprendimento (si pensi alla modellizzazione, ai cosiddetti *word problems*,...); una matematica a sua volta non parcellizzata, dove i diversi registri comunicativi si illuminano e chiariscono a vicenda e ogni persona è chiamata a elaborarli secondo la propria personale forma di intelligenza (GARDNER, 1987).

Quello che voglio qui sottolineare è che questa idea di matematica non è assolutamente “rivoluzionaria” o aliena; essa si inserisce in un filone di riflessione ben consolidato

Negli ultimi quaranta anni, l'approccio all'insegnamento della matematica è stato influenzato da due diverse “culture curricolari: un approccio formale e che pone il suo focus sull'astrazione, approccio che ha preso il nome di “nuova matematica” o “matematica moderna”, e un approccio più basato sul contesto, sulla realtà e sui problemi; quest'ultimo approccio fa riferimento a diverse teorie cognitive: dal costruttivismo piagetiano al cognitivismo alla cosiddetta “realistic mathematics education (RME)” (CONWAY & SLOANE, 2006).

Quest'ultima, legata alle idee di Freudenthal (un matematico passato a occuparsi di didattica), propone di partire da problemi veri in contesti non-matematici, ricchi e aperti alla matematizzazione, ben diversi dai “problemi scolastici” nei quali il contesto è più che altro un “vestito” (per altro spesso assai poco attraente) per la matematica in esso proposta⁴. Freudenthal aveva ben chiaro che “la matematica più astratta è sicuramente la più flessibile oggettivamente, ma non soggettivamente, dato che essa viene sprecata da soggetti che non riescono a valersi di tale flessibilità” (FREUDENTHAL, 1968).

Le scelte internazionali vanno precisamente in questa direzione; ad esempio, il rapporto PISA dell'OCSE, definisce la **competenza matematica** come la “capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino”. Lo stesso rapporto nota esplicitamente che tale competenza “non può essere ridotta alla conoscenza della terminologia matematica, ai fatti e ai procedimenti, né tantomeno alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò” (OCSE, 2004).

La stessa idea di matematica è presente anche in documenti italiani di fonte ufficiale. Secondo la CIIM dell'UMI “l'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica” (UMI-CIIM 2003)

Sia le *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione* che gli *Assi culturali per il biennio della scuola secondaria di II grado*⁵ si orientano in maniera esplicita in questa direzione, nella scelta dei temi da trattare, nelle considerazioni generali e nella ricerca delle modalità per realizzare la proposta.

Anche la recente riforma della scuola secondaria di II grado si muove in questa direzione. Gli obiettivi relativi alla matematica per gli Istituti Professionali prevedono esplicitamente, ad esempio, che “al termine del percorso quinquennale di istruzione professionale [...] lo studente deve essere in grado di utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative; utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni.”

⁴ Si pensi a conferma di ciò ai “problemi” di geometria della scuola secondaria di I grado che sono di solito semplici pretesti per applicazioni di formule e per calcoli aritmetici (in particolare per la ricerca di radici quadrate se si parla di applicazioni del teorema di Pitagora, di cui si trascura quasi del tutto l'aspetto davvero geometrico).

⁵ “La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell'abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere e affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati.” (Assi culturali: asse matematico).

Come insegnare Matematica ?

Se però l'insegnamento della Matematica ha una tale valenza culturale e sociale, allora il modo di insegnare deve essere determinato non solo dalla struttura interna delle conoscenze matematiche, ma anche dalla necessità di contribuire a obiettivi educativi generali, da legare allo sviluppo di capacità cognitive specifiche. Inoltre, si deve guardare ben al di là della proposta di pure tecniche: *“la formazione del curricolo scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: [...] priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione”* (UMI-CIIM 2003).

Una idea della matematica come quella sopra illustrata non può infatti essere trasmessa insegnandone la mera “sintassi”, ma si dovrà tenere conto di una serie di accorgimenti, che vorrei sintetizzare come segue.

- La matematica va insegnata e appresa in una comunità, confrontando i diversi punti di vista, sostenendo e cambiando le proprie idee, in una condivisione “sociale” di questo come di ogni altro sapere. Essa diviene così, fra l'altro, uno strumento fondamentale per sviluppare una visione sana e corretta del confronto (anche civile) e produrre degli “anticorpi” alle fandonie che oggi in troppe sedi vengono spacciate come ragionamenti o “verità”, semplicemente perché proposte da chi possiede mezzi, prepotenza e faccia tosta bastante a far prevalere la propria posizione senza un vero confronto.
- Ci si dovrà occupare quanto più possibile del mondo “reale”⁶, operando con oggetti “veri” e imparando a selezionare le caratteristiche significative per costruire il modello, “provando e riprovando” le varie strade di azione possibili.
- La proposta didattica deve concentrarsi sul metodo e sulla componente metacognitiva dell'apprendimento, oltre che su quella cognitiva, coinvolgendo l'allievo in una serie di scoperte e riflessioni. L'attività si strutturerà allora attraverso percorsi che incoraggino e stimolino gli allievi ad una continua verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte: bisogna rimuovere la convinzione (erronea !) che fare matematica consista nel trovare l'unica soluzione corretta e che questa si possa trovare solo mediante l'applicazione di procedimenti standard e formule di cui l'insegnante è depositario ed evitando assolutamente errori e ripensamenti (da nascondere ovviamente col bianchetto...). La creatività e l'applicazione del pensiero divergente devono diventare “strumenti” di routine nell'insegnamento-apprendimento⁷.
- La tecnologia potrà in questa direzione diventare una naturale “protesi” per favorire l'apprendimento. Laddove le risorse soggettive disponibili non siano sufficienti essa sarà una protesi in senso letterale (l'ingranditore di testi, il sintetizzatore vocale, il software per il disegno automatico, ma anche la semplice calcolatrice,...); ma essa potrà diventare anche una protesi in senso figurato, un vero e proprio strumento per la ricerca, laddove permetta di esplorare sentieri che altrimenti non potrebbero essere visitati (il calcolo di successioni con un alto numero di elementi, la precisione di figure in movimento, la percezione di oggetti tridimensionali, ...) e di “dare un senso” alla matematica (PAOLA 2010).

⁶ dove però la “realtà” è data non dal fatto che si tratti di una situazione “normale”, ad es. che qualcuno vada davvero al mercato e ne torni con 10 uova, ma dal fatto che avendo dei dati a disposizione relativi ad una situazione *evocativa* per lo studente si inizi a ragionarci sopra...

⁷ *“Qualsiasi atto creativo si avvale del procedimento euristico che ha come momento essenziale l'atto della scoperta: un'operazione di riordinamento e di trasformazione di fatti evidenti che permette di procedere al di là di quei fatti verso una nuova intuizione”* (BRUNER, 1968)

• Ma soprattutto la chiave di volta è il procedere con un “approccio laboratoriale”⁸, intendendo tale espressione nel più vasto senso possibile. Alla base di tutto deve esserci una prolungata attività di lavoro su opportuni campi di esperienza, a partire da esempi ed elementi concreti, i quali saranno esaminati, discussi, rappresentati in forme adeguate al livello di maturazione e conoscenza di ciascuno. In tal modo offriremo agli studenti esperienze cognitive significative, meglio se collegate ad altri contesti: linguistici, storici, sperimentali, motori, figurativi, ludici: in tal modo l'uso del linguaggio e del ragionamento matematico si porranno naturalmente come “*strumenti per l'interpretazione del reale e non come bagaglio astratto di nozioni*” (UMI-CIIM 2003). Vivere in classe un clima di “laboratorio” non significa avere a disposizione strumenti e materiali opportunamente pensati, o meglio non significa solo questo: “*Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).*” (UMI-CIIM, 2003). Il punto centrale è costituito dalla metodologia laboratoriale, che prevede come assolutamente lecito, anzi quasi obbligatorio e comunque naturale e apprezzato, esporre a tutti le proprie idee, giuste o sbagliate che si rivelino, in una situazione di rispetto, condivisione e ascolto. Talvolta si usa la metafora della “bottega artigiana” per sottolineare queste caratteristiche del laboratorio: sperimentale, concreto, collettivo. “*L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.*” (UMI-CIIM, 2003)

Come valutare in questo quadro?

Di fronte a una idea della disciplina (e di scuola) come l'abbiamo fino qui delineata, è chiaro che la valutazione, o la certificazione degli apprendimenti, non può essere fatta con le tradizionali metodologie, o almeno non con quelle sole.

Come principio generale, occorre anzitutto rinunciare a ricercare metodi e criteri assolutamente “oggettivi” di valutazione. Occorre accettare che la valutazione non possa mai essere totalmente oggettiva; essa è soggettiva proprio in quanto coinvolge “soggetti” in una interazione reciproca. Ricerche univoche (si veda ad es. LICHTNER, 2004) hanno dimostrato come la valutazione dipenda sempre da troppi fattori per essere oggettiva e proprio matematici e scienziati sanno bene quanto gli stessi numeri siano in realtà molto meno oggettivi di quanto possa sembrare⁹. Inoltre la valutazione è sempre strettamente legata alle scelte didattiche che l'insegnante opera e che stanno alla base della proposta.

Esistono tuttavia alcuni mezzi che permettono di dare un supporto oggettivo al procedimento soggettivo di valutazione. Tali mezzi, per essere efficaci, considerano il “processo” e non il “prodotto”, anche e soprattutto in occasione di attività laboratoriali. Tali mezzi valutativi possono comprendere:

- osservazioni continue e sistematiche (anche sulla base di griglie di lavoro o check-list);

⁸ “Sarà fondamentale il laboratorio di matematica, che permetterà agli allievi non solo di eseguire ma anche di progettare, discutere, fare ipotesi, costruire e manipolare con materiali diversi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi fatte” (Indicazioni Nazionali, 2007). “Conoscere non è un processo meccanico, implica la scoperta di qualcosa che entra nell'orizzonte di senso della persona che “vede”, si “accorge”, “prova”, “verifica”, per capire” (Indicazioni Nazionali per i Licei, 2010).

⁹ “L'eredità platonica, con la sua enfasi su distinzioni nette e su distinte entità immutabili, ci porta a vedere [...] la media e la mediana di un fenomeno come le vere “realtà”, e le differenze che consentono di calcolarle come un insieme di misure approssimate e imperfette di queste essenze nascoste. [...] Ma tutti i biologi evuzionisti sanno che proprio la varietà è l'unica essenza irriducibile della natura. Le differenze sono la vera realtà, non un insieme di misure imperfette della tendenza centrale: media e mediana sono le astrazioni” (GOULD, 1985)

- redazione e analisi di relazioni e/o “diari di bordo”;
- prove strutturate e non strutturate, su livelli diversi e con modalità diverse (pratiche, teoriche, operative);
- dialoghi specifici, anch'essi strutturati e non, riferiti a situazioni collegate a quanto fatto o appreso;
- autovalutazione da parte di tutti i soggetti interessati.

Come si vede, proprio queste modalità rendono la valutazione a sua volta un fatto metacognitivo e di crescita, impegnando competenze diverse e soprattutto coinvolgendo il soggetto in approcci non usuali ma altamente educativi.

È comunque fondamentale che la valutazione non consideri solo la singola performance ma il quadro generale, il trend di crescita, sulla base di mete e obiettivi condivisi e con-valutati coi mezzi sopra citati.

La valutazione diventa in questo modo “diagnosi”, anche al fine di valutare lo scarto tra l'atteso e l'ottenuto e poter “aggiustare il tiro” didattico/educativo al fine di superare quello scarto

Conclusioni

Credo che questi cenni, pur nella loro brevità, possano servire da un lato come fotografia di un cammino, dall'altro come stimolo per compiere ulteriore strada. Siamo consapevoli che la società e la scuola sembrano in realtà volersi muovere in una direzione diversa, ma non vogliamo rinunciare a dichiarare le nostre convinzioni,

“Non si tratta di identificarsi in un metodo, ma di avere una metodologia che permetta di far dialogare i metodi e renderli capaci di collaborare in un progetto, che a sua volta non può identificarsi in una tecnica da eseguire automaticamente” (Canevaro, 2010)

Infatti proprio l'introduzione di considerazioni apparentemente estranee alla matematica, quali l'approccio pedagogico e quello evolutivo della persona, hanno reso assolutamente chiaro come il concetto stesso di “normalità” di intelligenza o di apprendimento vada visto in una prospettiva molto più ampia e variegata. Si tratta dunque di stimolare negli insegnanti una riflessione generale su queste problematiche, convinti come siamo che solo l'attenzione ai più deboli renda non tanto persone più “buone” ma più “brave” (PIOCHI ET AL. 2005), più competenti e capaci di rispondere ai bisogni di ciascuno dei nostri studenti.

Bibliografia

- Canevaro Andrea (a cura di), *L'integrazione scolastica degli alunni con disabilità*, Ed. Erickson Trento, 2010
- Contardi Anna e Piochi Brunetto (a cura e con introduzione di), *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica. Metodologia e pratica di insegnamento*, Ed. Erickson Trento, 2002
- Brousseau Guy, Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (1986), 2, 33-115
- Bruner Jerome S, (ed. ital.), *Il conoscere. Saggi per la mano sinistra*, Armando ed. Roma, 1968
- Bruner Jerome S, (ed. ital.), *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale*, Bollati Boringhieri Milano, 1992
- Conway Paul F. e Sloane Finbarr C., *International Trends in Post-Primary Mathematics Education: Perspectives on Learning, Teaching and Assessment*, N.C.C.A., 2006
- Freudenthal Hans, Why to teach mathematics so as to be useful, *Educational Studies in Mathematics* 1 (1968), 3-8
- Gardner Howard (ed. ital.), *Formae mentis. Saggio sulla pluralità dell'intelligenza*, Feltrinelli Milano, 1987
- Gould Stephen Jay, The Median isn't the message, *Discover* (June 1985), 40-42 (http://cancerguide.org/median_not_msg.html)
- Lichtner Maurizio, *Valutare l'apprendimento*, F. Angeli Milano, 2004
- OCSE (a cura di), *PISA 2003 - Valutazione dei quindicenni*, Armando Editore Roma, 2004
- Paola Domingo (2010), Cabri Géomètre: una risorsa per un insegnamento-apprendimento "sensato" della matematica. In Accascina G. e Rogora E. (eds.), *Seminari di geometria dinamica*, Edizioni Nuova Cultura Roma, 2010, pp. 297-326.
- Piochi Brunetto, Contardi Anna e Pertichino Michele, *Qualcosa in più: l'integrazione come valore aggiunto nel viaggio di apprendimento della matematica*. In A. Davoli, R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri (eds.), *Alunni, insegnanti, matematica. Progettare, animare, integrare*, Pitagora ed. Bologna 2005, pp. 65-78
- Piochi Brunetto, *Area Matematica*. In: AA.VV., *Istruzione Professionale. Idee per il curricolo del Biennio*, CIDI, Roma 2010; pp. 157-172
- UMI-CIIM, *Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario*, Lucca 2003 (scaricabile all'indirizzo <http://umi.dm.unibo.it/scuola--99.html>)